

数学期望的教学探究

陈育明

泉州师范学院数计学院, 中国·福建 泉州 362000

【摘要】数学期望是概率论与数理统计的核心概念之一, 广泛应用于多个领域。本文围绕随机变量的数学期望教学展开探讨, 针对如何上好概率论与数理统计“随机变量的数学期望”的课程, 分别从学科历史起源、定义引入、实际教学案例设计这三个方面进行教学探究, 并通过优化教学策略, 来提升概率论与数理统计这门课程的教学质量。

【关键词】概率论与数理统计; 随机变量; 数学期望

引言

数学期望是概率论中的关键内容, 在社会多个领域发挥着重要作用。^[1]在教学过程中, 教师应该如何帮助学生深入理解数学期望的概念, 熟练掌握其计算方法, 并能灵活运用它解决实际问题, 是教师需要深入思考和探索的重要课题。通过对数学期望教学的优化, 能够提高学生的数学素养, 还能为他们将来的学习和工作奠定坚实的基础。

1 数学期望教学现状与问题

1.1 概念理解抽象, 学生难以理解

数学期望的概念较为抽象, 尤其是连续型随机变量的数学期望是通过微积分定义的。而教师在教学中往往偏向于对定义和公式的严密讲解, 缺乏对数学期望这一概念剖析。学生在学习数学期望这个概念的过程中, 不习惯将抽象的数学语言与实际意义相联系, 导致学生无法真正领会随机变量的本质, 它反映了随机变量平均取值的本质内涵。

1.2 教学内容与实际应用脱节

在传统教学中, 部分教师传授知识偏于理论, 忽视了数学期望和实际生活的紧密联系。教学实例偏向于讲解纯数学问题, 学生难以感受到数学期望在解决实际问题中的价值, 使得学生的学习兴趣 and 积极性大大的降低。

1.3 教学方法单一, 学生参与度不高

一些教师在数学期望教学中教学手法单一, 以教师讲解为中心, 让学生被动的接受知识。这种教学方式互动性少, 学生的参与度不高, 学生的自主学习能力和创新思维受到很大的限制。

1.4 评价方式片面, 无法全面反映学生水平

当前对学生数学期望学习的评价, 主要参照学生的考试成绩, 侧重考查知识记忆和计算能力, 忽视了学生在学习过程中的其他方面的评价, 无法全面反映学生的学习水平。

2 数学期望教学设计探讨

通过最近几年的概率论与数理统计的教学经验, 主要从下面三个方面对教学设计进行了探讨

2.1 随机变量的历史起源

数学期望的历史最早可以追溯到17世纪中叶, 一位赌徒向法国数学家布莱士·帕斯卡(Blaise Pascal)提出的一个分赌本问题。

该问题是: 两人公平赌博, 即每局各人获胜概率都是0.5, 各出赌金 a 元, , 约定谁先胜 S 局, 即可赢得全部注金 $2a$ 元。现进行到A胜 b 局, B胜 c 局(a 和 b 都小于 S)时赌博因故停止, 问此时赌金 $2a$ 应该如何公平的分配给A和B。

这个问题的核心是要解释清楚如何才算公平。1657年, 惠更斯出版了著作《机遇的概率》, 从公平赌博的值的一条公理出发, 推出关于期望的3条定理和11个问题, 标志着期望值概念的诞生。

通过这个有趣的起源, 可以激发学生学习数学期望的兴趣, 以及让学生探讨怎样才算公平, 增加学生对数学期望的理解。

2.2 数学期望的定义引入

首先通过对数学期望进行分类, 把数学期望分为两大类, 离散型随机变量的数学期望和连续型随机变量的数学期望。

接下来通过具体实例, 先引入离散型随机变量的数学期望的定义^[2]

检查一批圆形螺丝的直径，从生产的一批产品中任意抽测20件，其结果如下：

直径(mm)	48	49	50	51	52
件数	2	5	8	3	2

由条件可得这20件零件的平均直径.

$$\begin{aligned} \text{平均直径} &= \frac{48 \times 2 + 49 \times 5 + 50 \times 8 + 51 \times 3 + 52 \times 2}{20} \\ &= 48 \times \frac{2}{20} + 49 \times \frac{5}{20} + 50 \times \frac{8}{20} + 51 \times \frac{3}{20} + 52 \times \frac{2}{20} \\ &= 49.9 \text{ (mm)}. \end{aligned}$$

以 X 表示圆形螺丝的直径，假设 $\{x_i\}$ 为 X 所有可能的不同值，而 f_i 即为 X 取值 x_i 的频率， p_i 为 X 取值 x_i 的概率，即

$$\begin{aligned} p_i &= P(X = x_i), \text{ 式子改写成一般式: } \sum_{i=1}^5 x_i f_i \\ &= 48 \times \frac{2}{20} + 49 \times \frac{5}{20} + 50 \times \frac{8}{20} + 51 \times \frac{3}{20} + 52 \times \frac{2}{20} \end{aligned}$$

为依频率的加权平均。由概率的统计定义，当试验总次数 n

很大时，频率会接近于概率，因此我们写成 $\sum_{i=1}^5 x_i p_i$ ，这是以概率为权的加权平均，并由此抽象出离散型数学期望的定义。

定义1. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X = x_i) = p_i (i = 1, 2, \dots)$ ，若级数 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望或均值，即

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

由离散型和连续型随机变量的关系，让离散型中的 $p_i \rightarrow f(x)dx$ 、 $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 即可转化为连续型随机变量的相关运算，很自然的推导出连续型随机变量 X 的数学期望的定义。

定义2. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ ，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望或均值，即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

2.3 实际教学案例

数学期望的定义公式简单，理论上应该很容易求解，但在实际问题中有时又不是很容易求解的，核心原因是

什么呢？通过下面这个例子，我们就很自然的解释不容易求解的原因^[3]：

一公交大巴载有50位游客自火车站出发，有10个公交站旅客可以下车，如果到达一公交站却没人下车就不停车，以 X 表示停车的总次数，求 $E(X)$ （设每位游客在各个公交站下车是等可能的，并假设各游客互不熟悉，所以他们是否下车相互独立）。

解 引入随机变量 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第} i \text{站没人下车} \\ 1, & \text{在第} i \text{站有人下车} \end{cases}$ ，显然 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ 。

由题意，任一游客在第 i 站不下车的概率为 $\frac{9}{10}$ ，因此50位游客都不在第 i 站下车的概率为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$ ，在第 i 站有游客下车的概率为 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{50}$ ，即

$$P(X_i = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^{50}, \quad P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{50}, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

于是 $E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{50}, \quad i = 1, 2, \dots, 10$ ，所以

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 10 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{50} \right]. \end{aligned}$$

通过这个例子，我们可以得到求随机变量的数学期望的核心是要理解随机变量的分布，而随机变量的结构有时候并没有那么直观，需要把它们再分解，就像这道题目需要把停车的总次数 X 分解成每一站是否有停车，然后通过讨论每一站的数学期望，最后利用数学期望的可加性，才能得到结论。

3 数学期望教学优化策略

3.1 优化教学内容，突出概念本质

3.1.1 创设情境，引入概念

教师可以通过现实生活的例子，例如违法的六合彩票买卖问题，引导学生思考如何是否这种彩票是否值得购买，并得出六合彩票总收益为负，从而自然地引出数学期望的概念，使学生体会数学期望的存在和意义。

3.1.2 剖析概念，理解本质

在讲解数学期望的定义时，教师要深入剖析概念的内在

涵。例如,在分析例题1圆形螺丝直径问题时,引导学生思考如果圆形螺丝直径是一个随机变量,应该如何用数学期望来刻画其平均水平,让学生理解数学期望的本质是作为随机变量加权平均数。

3.1.3 拓展内容,丰富知识体系

教师可以让学生学习课外的数学期望的教学内容,数学期望在一些特殊分布中的应用以及与其它数学概念的联系。例如,讲解数学期望在泊松分布的计算方法过程中,引入随机过程的泊松过程,帮助学生更进一步的理解数学期望这个知识点。

3.2 创新教学方法,激发学生兴趣

3.2.1 问题驱动教学法

教师提出一些启发性和挑战性的问题,提高学生主动探索数学期望的兴趣。例如,在讲解数学期望的计算方法时,提出问题:“在中秋节博饼的规则下,各种情况的数学期望是多少?”引导学生主动思考和推导,提升学生的学习兴趣。

3.2.2 小组合作学习法

组织学生进行小组合作学习,给出一些高风险高收益和低风险低收益的例子,让学生在小组中共同探讨数学期望的实际应用问题,并让学生小组最后给出决策。通过小组合作学习,培养学生共同学习数学期望的兴趣。

3.2.3 多媒体教学法

教师可以利用数学软件和ppt,展示模拟实验,例如由脚印估计犯罪分子身高实验,提高学生用数学软件解决问题的兴趣。

3.3 加强实践应用,培养应用能力

3.3.1 引入实际案例教学^[4]

教学过程中应引入大量实际案例,与学生积极互动,让学生体会数学期望在不同领域的应用方法。例如,可以让学生模拟炒股,通过分析它们的数学期望和通过计算数学期望,来选出最优的投资决策。以此来培养学生的实践能力和解决问题的能力。

3.3.2 开展实践活动^[5]

组织学生开展实践活动,让学生亲自参与到实际问题的解决中。例如,让学生收集数据,分析某种商品的销售情况,运用数学期望的知识,通过回归分析,预测未来的销售趋势,并给出适当的营销策略。通过实践活动,培养学生的实践能力和创新精神。

4 结论

学好数学期望,可以提高学生数学素养和应用能力。通过与实际生活相结合教学内容,与学生多积极互动创新教学方法,引导学生利用数学期望的知识,解决现实生活中存在的问题。以此来提高教学质量,激发学生的学习兴趣,培养学生的数学思维和应用能力。

参考文献:

- [1] 茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,2004.
- [2] 李新娜,陈轲. 基于问题驱动的数学期望定义的教学探讨[J]. 河南教育学院学报,2016,25(2):67-69.
- [3] 苏连塔,陈明义. 概率论与数理统计教程-基于R[M]. 北京:电子工业出版社,2018.
- [4] 朱慧. 关于《概率论与数理统计》应用性方面的教学设计的思考[J]. 科学与财富,2020(25).
- [5] 包淑华,张健. 概率论与数理统计课程应用型教学法研究[J]. 山西青年,2021(5):36-37.