Universe Scientific Publishing
Educational Teaching,教育教学,(1)2019,4
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

考研试题中数列极限的若干解法研究

赵茂源
成都师范学院，中国·四川 成都 611130

【摘 要】在当今这个快速发展的时代，随着生活水平的提高，高等教育的普及，学生的就业压力大，部分学生对学术，深厚知识，高学历，高薪资的追求等原因，使得现在越来越多的人选择考研。

本文主要介绍的是考研试题中数列极限的若干解法，比如比较重要的夹逼准则、单调有界定理，归结原则等。本文通过实例较完全地总结了在考研中解决这类题型的方法。

【关键词】考研；数列极限；方法

1 两边夹定理

定理: 数列 $\{X_n\},\{Y_n\},\{Z_n\}$ 满足下列条件，

（1）当n>N_0 时，其中$N_0 \in N^*$，有$Y_n \le X_n \le Z_n$，

（2）$\{Y_n\},\{Z_n\}$有相同的极限 a，设 $-\infty<a<+\infty$

$\{X_n\}$的极限必存在，它的极限也为 a。

例：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n},(a\ge 1)$

观察式子，$a<\sqrt[n]{1+a^n}\le\sqrt[n]{2}\bullet a$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\bullet a=a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}=a$

小结：运用两边夹定理的关键在于找到 Y_n 和 Z_n（特别地，Y_n和 Z_n 可以为纯数字），并且它们的极限要相等，在用夹逼定理的时候，中间的已知数列极限不需要证明其极限存在，但两边的极限是一定要存在的。

2 归结原则

归结原则:$\lim\limits_{x\to x0}f(x)=A\Leftrightarrow$对任何$x_n\to x_0(n\to\infty)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$。

解：将 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 化成函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{mx^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx}{x}}=e^0=1$。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

小结：在解决某些数列极限问题的时候，我们不难发现运用归结原则将其转化为函数极限问题时，明显可以使问题变得容易得多。转换为了函数极限问题过后就可以采用求函数极限的一些方法，比如熟悉的洛必达法等。

3 stloz 定理

例：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p\in N)$。

解：令$x_n=1^p+2^p+\cdots+n^{p+1}$，$n\in N$，则由Stolz定理得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

注：Stolz定理是一种简便的求极限方法，特别对分子，分母为求和型，利用stolz公式定理有很大的优越性，它可以说是数列极限的洛必达法则。

4 定积分定义法

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$。

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=$$

解：原式 = $\lim\limits_{n\to\infty}$。

小结：在考试中如果遇到有无穷多项无穷小的和的数列，并且它们每一项的形式很规范这样子的数列极限问题时，就可以尝试一下能否像上面给出的例题一样将数列极限看成是某一个函数定积分的定义。这样复杂的数列极限就可以转化为定积分问题了。

5 单调有界定理

例：设数列 $X_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots\sqrt{a}}}$（n个根式，a>0，n=1，2，…），证明其极限存在，

并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证：可以得出知 $x_n=\sqrt{a+x_n-1}$ (1)

用数学归纳法可以证得：$x_{n+1}>x_n,K\in N$ (2)

所以得出数列$\{x_n\}$单调递增，同时也不难可以知道 x_n 数列是有界的。

满足单调有界定理，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=k$ 存在

在(1)式两边取极限得:$k=\sqrt{a+k}$，解出 $k=\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ 和（$\dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$ 舍去），

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$$。

小结：利用单调有界定理求数列极限通常步骤为：1、证明数列是单调有界的，那么可设数列极限为k；2、建立出数列相邻两项之间的一个关系式；3在关系式两边取极限，通过得到的一个关于k的方程计算出k，有不满足条件的k（如上题）应当舍去。

6 重要极限的应用

有一些常见的重要的数列的极限需要我们去记住，在做题的时候可以帮助我们较快地解决问题，本身这些数列极限的证明也并不是很难，很多证明的技巧和方法也是值得我们去学习的，下面只给出了其中三个常见的极限。

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中 $|q|<1$(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e(3)\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1$

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\bullet\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\bullet\left(1+\frac{1}{n}\right)\bullet\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=e\bullet 1\bullet 1=e$

7 几何平均值与算术平均值

若数列$\{a_n\}$有极限，则它的几何平均值和算术平均值的极限与原极限相同。正是利用这一点可以帮助我们很好地去

解决一些数列极限，但一定要注意是在能证明$\{a_n\}$有极限的条件下进行的。

假设存在数列极限$\{x_n\}$，若$\lim_{n\to\infty} x_n = a, y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

$$z_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \text{那么} \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

8　利用等价无穷小

等价无穷小是计算未定型极限的常用方法，它可以使求极限问题化繁为简，化难为易。虽然等价无穷小替换在求函数极限中见得多，但在数列极限问题中也是可以用得到的。(注：并不是什么情况下都可以用等价无穷小的)。

例：计算 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

[错解]：由于当，$x \to 0, \tan x \sim \sin x \sim x,$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

[正解]：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \bullet \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

9　压缩映像法

压缩映像原理：设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1} - x_n| \le r|x_n - x_{n-1}|$，，$(0 < r < 1)$则称它为压缩数列，任意压缩数列必收敛。

例：设$x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} (n = 0,1,2,\cdots)$ 求$\lim_{n\to\infty} x_n$

解：这道题可以先证明它是压缩数列，利用压缩映像原理证明$\{x_n\}$是收敛的，设其极限为，在已知的递推式两边取极限可以求出 $a = \sqrt{2}$ 。

小结：利用压缩原理求数列极限的关键在于证明数列是压缩数列，整个过程和前面提到的用单调有界原理求数列极限很相似，都是先证明它是收敛的，最后再假设极限，通过等式计算出结果。

参考文献：

[1]杨芮,杨铁坪.极限问题的特殊解法[J].贵阳学院学报(自然科学版),2019,14(01):13-16.

[2]张睿.Stolz 定理及其应用探究[J].数学学习与研究,2019(05):19-20.

[3]陈忻锴.数列极限求解方法与技巧探讨[J].课程教育研究,2018(49):119-120.

[4]胡汉章.求无穷项和数列极限方法的探讨[J].教育教学论坛,2018(48):186-187.

[5]李金媛.求数列极限的几种常用方法[J].数学学习与研究,2018(18):6.

[6]杨雄.数列极限的求解方法探讨[J].佛山科学技术学院学报(自然科学版),2018,36(01):44-47.