Universe Scientific Publishing
Educational Teaching,教育教学,(1)2019,5
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

用“反客为主”策略求解一道高考数学题

孟宪南
茶陵县腰陂中学，中国·湖南 株洲 412406

【摘　要】对于数学问题，在进行解答时往往有很多方法，有的方法会使得问题简单，而有的方法则可能会使得问题变得复杂。而在高考过程中，时间有限，合理的选择解题方法往往能够获得良好的效果。文中，主要就用“反客为主”策略求解一道高考数学题进行介绍。

【关键词】数学问题；反客为主；高考

解答数学问题，方法很多，大多用直接法求解，但有时直接求解时难免会遇到麻烦，不方便，特别是需要分类讨论的小题，更让考生觉得花时太多，功效不大，不合算，但又不愿舍弃。尤其是高考，时间紧，压力又大，追求高效快速解题，应讲究方法。当直接求解遇阻时，不妨变换解题策略，便可达到事半功倍的效果。下面就2012年浙江高考数学（理）第17题解答为例，略加说明之。

题目：设aR，若x＞0时均有[(a－1)x－1](x ²－ax－1)⩾0，则a＝______________.

我查阅了许多相关的资料，解法上大同小异，皆为直接法，有一书为此题做出了比较详细的解答，现抄录如下：

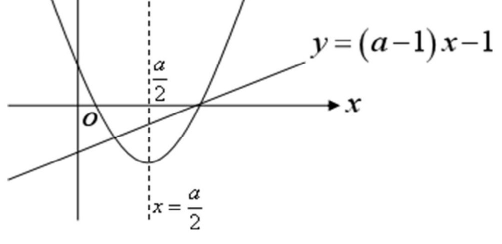
【解析】对α进行分类讨论，通过构造函数，利用数形结合解决 。

（1）当α =1时，不等式可化为：$x>0$ 时均有 χ ²−−1 ⩽ 0，由二次函数的图象知，显然不成立,$\therefore a\neq 1$

（2）当 $a<1$ 时，$\because x>0,\therefore (a-1)x-1<0$，不等式可化为: $x>0$ 时均有 $x^2-ax-1\leq 0$，$\because$ 二次函数 $y=x^2-ax-1$的图象开口向上，

$\therefore$不等式 $x^2-ax-1\leq 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上不能均成立，$\therefore a<1$不成立.

(3)当 $a>1$时,令 $f(x)=(a-1)x-1, g(x)=x^2-ax-1$,两函数的图象均过定点，$(0,1)$, $\because a>1,\therefore f(x)$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，且与x轴交点为$\left(\frac{1}{a-1},0\right)$，即当时$x\in\left(0,\frac{1}{a-1}\right)$，当时,. $f(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a-1},+\infty\right)$ 时，$f(x)>0$ 又二次函数 $g(x)=x^2-ax-1$ 的对称轴为 $x=\frac{a}{2}>0$，则只需 $g(x)=x^2-ax-1$与x轴的右交点为$\left(\frac{1}{a-1},0\right)$,如图所示，则命题成立，即点$\left(\frac{1}{a-1},0\right)$ 在 $g(x)$ 的图象上，所以有，$\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$，整理得：$2a^2-3a=0$，解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$（舍），由上可得：$a=\frac{3}{2}$



上面的详细解答过程，是运用分类讨论的思想方法来处理的。要准确完成整个过程，不仅需要扎实的基础，而且要思路清晰，条理清楚，分析透彻到位，作为指导及训练学生的逻辑思维及表达能力，是非常不错的，但如果作为高考考场应试，学生要做到这样求解真的很难。我觉得还应当允许解题策略性的东西存在，可以考虑用下面的做法，效果会更佳。

【解法二】（反客为主策略）

$\because x>0$，所以将不等式[(a－1)x－1](x ²－ax－1)⩾0化为关于a的不等式 $\left(a-\frac{x+1}{x}\right)\left(a-\frac{x^2-1}{x}\right)\leq 0$，依题意 $x>0$ 时该不等式均成立，因而只可能关于 a 的二次方程 $\left(a-\frac{x+1}{x}\right)\left(a-\frac{x^2-1}{x}\right)=0$ 的判别式为零，于是 $\frac{x+1}{x}=\frac{x^2-1}{x}\Rightarrow x=2$，或 $x=-1$（舍），将 $x=2$ 代入$\left(a-\frac{x-1}{x}\right)\left(a-\frac{x^2-1}{x}\right)\leq 0\Rightarrow\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$, 所以只有$a=\frac{3}{2}$。

这种解法的巧妙之处就是抓住条件“均成立”打开突破口，注意到两个括号内都可看做a的一次式，联想到到二次不等式 $(x-m)(x-n)\leq 0$ 恒成立的条件，只有$(x-m)(x-n)=0$ 恒成立，故而其判别式为0，即方程两根 $m=n$，由此解之较为便捷。这种“反客为主”的处理方式，也能较好地反映二次不等式、二次方程的相关基础知识的灵活运用，同时也是数学解题思维方法的又一个特别的训练。

参考文献：

[1]周琪.高考数学选择题解题策略研究[J].数学学习与研究,2019(16):115.
[2]李娟.在高中数学教学中培养学生的数学解题能力[J].数学学习与研究,2018(21):36.