

如何根据二次函数的图象确定字母系数的关系 “七看”法

李学连

宣恩县沙道沟镇民族初级中学, 中国·湖北 宣恩 445500

【摘要】二次函数的图象与系数 a 、 b 、 c 有密切的联系。

【关键词】二次函数; 图象; 七看

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象与系数 a 、 b 、 c 有密切的联系, 作为一个重要考点在考试中经常出现。这类题往往需要学生认真观察题目所给的图象, 利用图象的特征并综合抛物线的四个基本性质, 才能完整解答。我根据做题的经验总结出了“七看”解法。

1 看抛物线的开口方向。

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的开口只与 a 的符号有关。利用抛物线的开口方向就可以确定二次项系数 a 的符号, 即当抛物线开口向上时: $a > 0$; 抛物线开口向下时: $a < 0$;

2 看抛物线的对称轴。

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是与 y 轴平行的直线, 所以可观察抛物线的对称轴与 y 轴的位置关系:

当抛物线的对称轴在 y 轴左边时: 有 $-b/2a < 0$, 可得 a 、 b 同号;

当抛物线的对称轴在 y 轴右边时: 有 $-b/2a > 0$, 可得 a 、 b 异号;

当抛物线的对称轴是 y 轴时: 有 $-b/2a=0$, 可得 $b=0$ 。

从而归纳出关于 a 、 b 的符号判断规律: 左同右异

有时还要看抛物线的对称轴在直线 $x=1$ 的左边(右边)或 $x=-1$ 的左边(右边), 从而得出 $-b/2a > 1$ 等类似的不等式, 从而去解决题目中含有 $2a$ 与 b 的相关结论。

3 抛物线与 y 轴的交点位置

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$,

所以: 当抛物线交 y 轴的正半轴时, $c > 0$

当抛物线交 y 轴的负半轴时, $c < 0$

当抛物线交原点时, $c=0$

4 看抛物线与 x 轴的交点个数。

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的交点个数只有三种情况: 有两个交点, 有一个交点, 没有交点。而交点个数情况又与对应方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式有关。即: 抛物线与 x 轴有两个交点时, 则有 $\Delta = b^2-4ac > 0$; 抛物线与 x 轴只有一个交点时, 则有 $\Delta = b^2-4ac = 0$; 抛物线与 x 轴没有交点时, 则有 $\Delta = b^2-4ac < 0$, 所以可以通过观察抛物线与 x 轴的交点个数来解决与 b^2-4ac 有关的问题。

5 看特殊值

在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 中, 通过 x 取特殊值所得函数值为题目中出现的特殊式子, 如: 令 $x=1$ 时, 得 $y=a+b+c$, 再结合图象就可以判断题目中 $a+b+c > 0$ 或 $a+b+c < 0$ 的正误。

6 看抛物线的顶点

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的顶点是图像的一个非常重要的特征, 顶点它要么是抛物线的最高点, 要么是抛物线的最低点。所以可以利用顶点的坐标来解决题目中有关极值得问题。

7 看抛物线的变化趋势

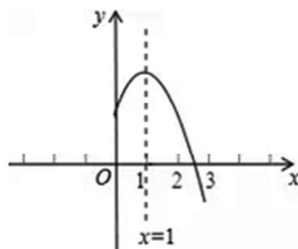
因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像都是轴对称图形, 它是对称轴 $x=-b/2a$ 为界一边递增另一边递减或一边递减另一边递增, 因此就可以通过观察图象的变化趋势来判断题目中有关函数值大

小比较的问题。

例如: 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) (a 、 b 、 c 是常数) 图象的一部分, 与 x 轴的交点 A 在点 $(2, 0)$ 和 $(3, 0)$ 之间, 对称轴是 $x=1$ 。对于下列说法: ① $abc < 0$; ② $2a+b=0$; ③ 当 $-1 < x < 3$ 时, $y < 0$; ④ $3a+c > 0$; ⑤ $a+b \geq m(am+b)$ (m 为实数), ⑥ 若有三点 $(-3, y_1)$ 、

$(-1, y_2)$ 、 $(0.5, y_3)$ 在抛物线上, 则 $y_1 > y_2 > y_3$,

⑦ $b^2-4ac > 0$ 。其中正确的有 ()



A. ①②⑤⑦ B. ①②③④

C. ②③④⑤ D. ③④⑤⑥

解: ①看对称轴: 对称轴在 y 轴右侧, a 、 b 异号, $ab < 0$, 抛物线与 y 轴的交点位置可知交点在 y 的正半轴, 即得 $c > 0$ 所以 $abc < 0$. 故①正确

②看对称轴: 因为对称轴 $x=1$, 即 $-b/2a=1$. $2a+b=0$; 故②正确;

③看抛物线与 x 轴的交点个数可知: 有两个交点, 再结合图象得, 当 $-1 < x < 3$ 时, 对应抛物线的图象在 x 轴的上方, y 的值大于 0 , 故③不正确;

④看对称轴可得: $2a+b=0$ 得 $b=-2a$, 看特殊值有: 当 $x=-1$ 时, $y=a-b+c < 0$, 所以 $a-(-2a)+c=3a+c < 0$, 故④不正确;

⑤看抛物线的顶点可知: 顶点是抛物线的最高点, 即有当 $x=1$ 时, 有最大值为 $y=a+b+c$, 而当 $x=m$ (m 为任意实数) 时, $y=am^2+bm+c$, 所以有 $a+b+c \geq am^2+bm+c$, 即有 $a+b \geq m(am+b)$ (m 为实数), 故⑤正确;

⑥看抛物线的变化趋势可知: 当 $x < 1$ 时, y 随 x 增大而增大, $(-3, y_1)$ 、 $(-1, y_2)$ 、 $(0.5, y_3)$ 三点都在直线 $x=1$ 的左边, 且 $-3 < -1 < 0.5$, 所以应是 $y_1 < y_2 < y_3$, 故⑥不正确;

⑦看抛物线与 x 轴的交点个数可知: 抛物线与 x 轴有两个交点, 则有 $b^2-4ac > 0$, 故⑦正确。

这题可选的序号为①②⑤⑦, 本题正确答案选 A。

综上所述, 我们在解决这类问题时, 只要掌握二次函数的基本知识, 并学会用“七看”去观察抛物线的图象特征, 再结合抛物线的基本性质就可以解决绝大部分这样的问题。

参考文献:

[1]《人教版九年级教师教学参考用书》。

[2]《中考学科说明》。