

浅谈大学数学对高中数学的指导与联系

陈亚辉

石河子大学, 中国·新疆 石河子 832003

【摘要】在高中数学学习中,解析几何是很重要的一部分内容,由于难度比较大,很多学生都会产生困惑。为了帮助他们解决,我们要学习高等数学中的空间解析几何知识,对面临问题进行深入研究,形成正确的认识。文章借助于高等数学中的空间解析几何知识,对高中解析几何问题进行论证,进一步提升认知水平。

【关键词】空间解析几何; 中学几何; 指导

引言

相比较于高中数学,高等数学知识难度更大,在高中数学学习中经常会遇到问题,传统方法解决起来比较难。不妨站在高等数学的角度去分析高中数学,这样就会变得相对容易,从不同角度去分析,理顺解题的思路。本文以空间解析几何为出发点,对高中的部分知识进行探究,引导学生对其有更加深刻的了解。

1 概述

在高中数学教材(选修2-1)第二章时,其中提到了一个论点,用一个不垂直于圆锥的轴的平面来截圆锥,发现当截面与圆锥轴夹角不同的时候可以得到相应截面曲线,分别为椭圆、抛物线与双曲线。为了便于更好的学习,教材中给出了公式,可以用于数学题的计算。

为了更加深入理解该知识点,我们要采用另一种方法来论证,将两个几何图形所对应的代数方程表达式联立起来,可以用于求解已知两个几何图形的相交图形的表达式,同时会想到,将表示圆锥体的代数表达式与一个截面的代数表达式联立求解或许会得到椭圆、抛物线与双曲线的标准代数方程。为了验证这个想法,我们需要运用高等数学的知识,主要是三维空间直角坐标系,借助于代数方程式来表达三维空间中的立体几何图形问题^[1]。

几何学是基础数学的重要组成部分,在几何学的基础上产生了解析几何,解析几何充分体现了数与形的结合,具有直观性、实验性等特点,为基础数学发展起到了重要推动作用。

在高中数学中会学习到平面解析几何,基本方法是坐标法。在学习过程中,先要建立一个坐标系,将坐标上的点用有序实数组来表示,另外还可以通过代数方程研究几何图形的性质。坐标法可以运用数来计算,进行对几何的研究。

空间解析几何是高等数学的重要知识,和高中所学的平面解析几何相同,都是采用代数的方法来对几何图形。建立起空间坐标系,将点和数组向量对应起来,将几何图形用代数方程表示出来^[2]。

本文的研究思路如下。先对空间解析几何进行介绍,有一个初步了解。再推到空间几何图形代数表达式。以二次曲面为例展开研究,采用空间解析几何中经典的压缩方法,运用这种方法对二次曲线中各种代数和几何性质进行探讨。最后回答了文章刚开

始提出的问题,得出一个正确结论。

2 用代数方法推理几何图形表达式

在本文研究中,空间几何图形为一条母线绕着一条轴线旋转而成,也就是旋转面。对几何图形特征进行分析,通过求解可以得出相应的代数方程表达式,以 L 为轴, F 为母线的旋转面,记作 S 。不难发现,空间中任何一个点想要存在,必须要求 M 绕轴线旋转而得的圆和 F 有交点,这是点的充分必要条件。将所得结论和三维空间坐标系联系起来,将 Z 轴作为轴线,并且 F 是 yz 平面上的一条平面曲线,用公式表达出来为 $f(y, z) = 0$,我们提出一个假设,其中点 $M(x, y, z)$ 绕 Z 轴旋转得到的圆周与 yz 平面上的交点刚好是 M 。将 M 在 yz 平面上的坐标表达出来,再带入到平面曲线的方程,可以对含有 x, y, z 的方程式进行求解,得出了旋转面的空间表达式方程^[3]。

联系高中教材中的问题,运用相同的方法,旋转双曲线及抛物线得到的旋转双(单)叶双曲线和旋转抛物面。在对椭圆旋转时要围绕它的长轴或者短轴进行,得到旋转面为旋转椭球面。我们仔细观察这个图形,从上往下看的时候,会得到多个圆,它们的面积不同。在这个图形中,用一条线将上顶点和下顶点连接起来,这条线被称之为经线,用垂直于 x, y 平面的面截取图形,会发现形成了一个椭圆。这也就是空间图形表达式的一种证明方法,对平面图形旋转就可以得到空间图形。

在空间几何图形表达式代数推理过程中,最为关键的是将平面几何图形旋转后变成空间几何图形,过程中要分析发生的变化,并了解二者之间存在的联系,作为研究开展的条件。推理时要理顺思路,特别是比较关键的部分要进行有效控制,处理好遇到问题,保证可以得出空间几何图形的表达式。

3 二次曲面

二次曲面几何直观定义是一个关于 x, y, z 的二次方程,在三维空间中是一个几何图形。在上文中,求解代数方程的关键是对几何特征进行分析,这里不同的是,以代数方程为出发点,对一个代数方程所对应的空间几何图形特征进行研究。为了更好的研究,要用到空间解析几何中的压缩法,可以更加直观感受到几何图形的形象。

压缩法是几何图形研究的常用方法,具有生动形象、直观的特点。平面椭圆可以看作是被拉长或者压扁的圆。将一个长轴为2,短轴为1/3的椭圆沿着长轴方向压缩2倍,短轴方向拉伸3倍,就会变成一个半径为1的圆。采用以下公式来进行论证。

$$x^2/4+9y^2=1$$

利用 $x'=1/2x, y'=3y$

得到 $x^2+y^2=1$

这种方法具有较强适用性,可用于空间直角坐标系中其他几何图形变化的分析。点M在空间直角坐标系表示为 (x, y, z) ,通过做向 xy 平面的,系数为 k 的压缩得到点 (x, y, kz) 。如果将原图形每一点作如上的压缩变化就会得到新的图形,采用这种方法对椭圆旋转面进行论证。

$$X^2/a^2+y^2/a^2+z^2/b^2=1$$

椭球面方程为: $X^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$

这个几何图形是由单位球面经过了三次压缩变化后得到的,具体表现为向 yz 平面做系数为 a 的压缩,向 xz 平面做系数为 b 的压缩,向 xy 平面做系数为 c 的压缩。在空间中向三个平面作投影形成的图形是三个椭圆,长轴和短轴都做了系数为 a, b, c 的压缩。分析后有更加深入的了解,为空间图形和截面的问题研究做好准备。

对单叶双曲面研究,采用压缩法来举例,旋转单叶双曲面公式表示为: $X^2/a^2+y^2/a^2-z^2/c^2=1$

将图形向 xz 平面做系数为 a/b 的压缩,会得出图像:

$$X^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$$

这个方程被称之为单叶双曲面,采用同样的方法,我们可以得到双叶双曲面和椭圆抛物面的方程。

下面研究图形和截线的关系,重点在于如何表达出平面截线。上文中这个几何图形在空间中向三个平面作投影得到的三个椭圆,其中长轴、短轴都做了系数为 a, b, c 的压缩变化。基于此,用一个平行于 xy 平面的平面截线截取这个图形,会得到椭圆。关于截线的代数表达方程还需要进一步讨论,才能形成正确认识。与 xy 轴是平行关系,说明 xy 平面上的任何一个点到截线平面距离是相等的,距离为 z 的取值,截线方程为 $z=h$ ^[4]。这个图形在 yz 平面上投影的短轴长为 c ,图形在 z 轴上的变化范围在 $-c$ 和 c 之间,形成椭圆 z 值也在这个范围之内。对截线方程和椭球面方程联立可以得到表达式:

$$X^2/a^2+y^2/b^2=1-h^2/c^2, z=h$$

采用同样的方法,用平行于另外两个坐标系平面的截线来截取图形,得到结果是非常接近的^[5]。

对倾斜平面截线的表达式进行探讨,前面介绍的是如何利用平行于某个平面的平面同几何平面相交所得截线的代数方程^[6]。现有结论是用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥,当截面和圆锥轴夹角不同的时候,就会得到不同的截口曲线。怎样去解决不垂直的问题,需要我们去思考,其实是比较简单的,想要表达一个在空间中沿着 x 轴倾斜角是 k 且过原点的截线,由于截线是沿着 x 轴延伸,所以方向没有特殊要求,得出 $x \in \mathbb{R}$ 。对截线进行观察,现在 y 轴与 x 轴对应, z 轴与 y 轴对应,数学表达式为 $z=ky, x \in \mathbb{R}$,满足这两个条件的截线就是表达的截线,很好回答了文章开头提出的问题^[7]。

4 结语

综上所述,上文对高等数学中的空间解析几何进行了分析,运用了实例研究,采用有效方法,得出了正确结论。高中数学和高等数学虽然在内容上有所差异,但相互之间存在着密切联系,所以在解决问题的时候要结合起来,可以找到合理方法。在学习过程中要善于总结经验,注重对知识论证,不断加深理解程度。

参考文献:

- [1]滕吉红,鲁志波,黄晓英.浅析高等数学中蕴含的思维观和方法论[J].高等数学研究,2020,23(4):124-126.
- [2]张敏,易正俊.高等数学空间解析几何教学动画系统的构建与实践[J].东方教育,2015,(4):54-56.
- [3]盖俊震.空间解析几何中一道题的五种不同解法[J].产业与科技论坛,2018,10(22):160-161.
- [4]严海霞.空间解析几何实践教学轨迹方程的计算[J].内蒙古师范大学学报(教育科学版),2015,28(12):152-154,158.
- [5]刘卉.空间解析几何课程教学改革的几点思考[J].高教学刊,2020,(8):123-125.
- [6]周隆明.专升本高等数学空间解析几何解题思路剖析[J].年轻人,2020,(13):97.
- [7]李佩瑾,罗庆红,王智刚.空间解析几何中一类平面问题的巧解[J].高师理科学刊,2020,40(8):66-68.

作者简介:

陈亚辉(1998.09—),男,汉族,黑龙江鹤岗,本科,石河子大学,研究方向:大学数学。