Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

复变函数课堂中的比较教学法

李艳青　黄得建　林　越　蒙黄林
海南热带海洋学院理学院，中国·海南 三亚 572022

【摘　要】本文把复变函数的课堂教学和数学分析中的相关内容相结合，采用相似知识点的对比教学方法，增加同学们对复变函数学习的趣味性，从而对复变函数的知识体系牢固掌握。

【关键词】复变函数；数学分析；解析函数；比较教学法
【基金项目】海南省高等学校教育教学改革研究项目：基于数字化信息教学平台的混合教学方法对统计学课程教学的改革与实践研究(编号：Hnjg2019-77)，海南省高等学校教育教学改革研究项目：基于海洋类高校的数学建模课程教学改革研究(编号：Hnjg2021-81)，海南热带海洋学院教育教学改革研究项目：高等数学教学理论与应用能力研究(编号：RHYktjg2020-26)，海南热带海洋学院2020年校级教育教学改革研究项目资助（RHYjgzd2020-02）。

复变函数和数学分析都属于分析学的范畴，复变函数是数学分析在复数域上的推广。二者既有联系又有区别，大学数学专业的学生已经在第一和第二学年完成了数学分析的学习，这为后续课程复变函数的学习奠定了一定的基础.

复变函数是自变量为复数的函数，这门课程主要研究对象是解析函数.数学分析课程研究的对象是实变函数，即定义在实数集上的函数.在复变函数的教学过程中，如果及时结合数学分析中的相似知识点加以比较分析，会提高学生对复变函数的学习兴趣并且掌握得更深刻.本文从以下几个方面对复变函数和数学分析课程对比以取得更好的教学效果.

1　函数的几何基础

复变函数的基础几何概念是平面点集和区域，而数学分析中的基础几何概念是数轴上的数集和区间.

定义1.1[1]平面上以 z_0 为心，以 ρ（任意正数）为半径的圆（$|z-z_0|<\rho$ 所确定的点的集合），称为 z_0 的邻域，记为 $U(z_0,\rho)$；称由 $0<|z-z_0|<\rho$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(z_0,\rho)$.

定义1.2[1]如果平面点集D满足以下两个条件，则称它是一个区域.

(1)D是一个开集；

(2)D是连通的，就是说中D任何两点都可以用完全属于D中的折线连接起来.

定义1．3[1]设E为点集，若 $\forall z\in E$ 都有 $|z|\le M\left(M\in R^+\right)$，即E全含于某一圆内，则称E为有界集，否则称E为无界集.

复变函数中研究对象定义域是点集或者区域，它们包含在复平面内，而其涉及到的距离是复数差的模，而数学分析中两个点之间的距离则是两数差的绝对值.

2　函数的概念及微分

定义2.1[1]设G为一复数集，若对每一复数z，有唯一确定的复数w与之对应，则称在G上确定了一个单值函数，如对G内每一复数z，有不止一个w与之对应，则称在G上确定了一个多值函数.G称为定义域，w值的全体所成集合M称为值域.

复变函数的自变量和函数值都属于复数域.复变函数可以是单值也可以是多值函数.如 $w=|z|, w=\bar{z}, w=z^2$ 都是单值函数，而 $w=\sqrt[n]{z}$ 及 $w=Argz(z\neq 0)$ 都是多值函数.

定义2.2[2]设A是非空数集.若存在对应关系f，对A中任意数x，由对应关系，存在唯一 $y\in R$ 与之对应，则称f是定义在A上的函数，x称为自变量，对应的y为x的函数值称为因变量.数集A称为函数的定义域，函数值的集合称为函数的值域.

由这个定义可以看出，数学分析中的一元实变函数都是单值的函数.因此复变函数和一元实变函数是既有相似又有区别.复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的连续性和极限，可以转化为实部和虚部的连续性和极限问题，对 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 之间的关系没有要求.另外,实变函数关于函数极限及连续的性质可以推广到复变函数中."复变化实变"是研究复变函数的重要思想方法.

数学分析中，为了研究函数的各种性态及函数值的计算，要借助函数的导数或微分作为重要工具.复变函数则以解析函数为主要研究对象.复变函数在一点的导数和微分的概念形式上和数学分析中一元函数相关概念是一致的.因此微分学中所有求导公式可以不加更改应用于复变函数.

定义2.3[1]设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 $D\subseteq C$，若z按照任意路径趋向于 z_0 时，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

都存在且有限，则称f(z)在 z_0 处可导，极限值为函数在 $z=z_0$ 处的导数.

这个概念中，导数的存在与 $z\to z_0$ 的路径无关，这比数学分析中函数在一点可导的条件要强很多.

例2.1讨论复变函数 $f(z)=2x-yi$ 的可微性.

解　：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{2\Delta x-ik\Delta x}{\Delta x+ik\Delta x}=\frac{2-ik}{1+ik},$$

这个极限与斜率k有关，故该函数在任意点处都不可微.

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

此例中尽管函数的实部和虚部都是可微的，但此函数并不是可微的.

定义2.4[1]如果函数w=f(z)在区域D内可微，则称之为区域D内的解析函数.

当讨论函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的可导性和解析性时，即使 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都可导，而 $f(z)$ 也未必是可导或解析的，二者还需要满足柯西黎曼条件.

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了实变初等函数的某些基本性质，又有一些与实变初等函数不同的特性. 如:指数函数具有周期性、负数无对数的结论不再成立、三角正弦与余弦不再具有有界性、双曲正弦与双曲余弦都是周期函数.

3 函数的积分

将一元实变函数积分表达式 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 中的函数 $f(x)$ 推广为复变函数 $f(z)$，积分区间[a,b]换成有向曲线C，类似地可得到复变函数沿有向曲线的积分. 复变函数沿曲线C的积分性质和数学分析中曲线积分类似.

定义3.1[1]设C是复平面上以A为起点，B为终点光滑有向曲线，类似数学分析中曲线积分的定义，依次通过“大化小，常代变，近似和，求极限”等步骤定义复变函数 $f(z)$ 在曲线C上的积分 $\int_c f(z)dz$，记作，即 $\int_c f(z)dz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$. C闭合时记作 $\oint_c f(z)dz$.

4 函数项级数

复函数项级数是表示和研究解析函数的有力工具，复数项级数和复函数项级数的概念和性质都是实数范围内相应概念、性质的推广. 二者既有联系又有区别，需要对比教学. 复函数项级数的收敛、发散、绝对收敛以及条件收敛的定义和实变函数项级数是一致的，也有判定复函数项级数的柯西收敛准则和幂级数的概念. 由复函数项级数收敛的定义，可将复函数项级数的收敛可以转化为两个实函数项级数都收敛.

定理4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$（其中 $\alpha_n=\alpha_n+ib_n$）收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

解析函数的本质特征是在解析区域内任一点处可展成泰勒级数，这和数学分析中的一元实函数是有区别的.

定理4.2(泰勒展开定理)设 $f(z)$ 在区域D内解析，z_0 是D内一点，在 $|z-z_0|<R$ 中，$f(z)$ 可唯一地表示为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$，其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，即 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$ 在 z_0 的Taylor级数.

由这个定理可以看出解析函数的泰勒定理形式上和数学分析中一元实变函数的泰勒定理一致，但两定理中的条件是不同的. 而两者计算泰勒展式的方法是类似的，都采用直接或间接展开法.

复变函数中的洛朗级数是研究圆环域内解析函数性质的重要工具，而一元实变函数里没有相同内容. 洛朗级数也称双边幂级数，级数中既有正幂项又有负幂项. 当其负幂项系数等于零时，洛朗级数就是泰勒级数，泰勒级数是它的特殊情况.

定理4.3(洛朗定理)设 $0\le R_2<R_1\le+\infty$，函数在圆环域内解析，则函数 $f(z)$ 在此圆环域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 内必能唯一地展为双边幂级数，即洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ (R_2<|Z-Z_0|<R_1),$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为洛朗系数，c是 z_0 以为中心，半径为 $R(R_2<R<R_1)$ 的正向圆周.

4 小结

本文只简单的列举了几处复变函数和数学分析中的异同点. 在教和学的过程中，通过比较、分析，既复习巩固、强化了数学分析中的内容，又加深了对复变函数的理解，既能提高学生的学习兴趣，又能增强教学效果.

参考文献:

[1]钟玉泉. 复变函数论(第四版)[M]. 北京: 高等教育出版社,2013.
[2]刘玉琏,傅沛仁,林玎等. 数学分析讲义上册(第五版)[M]. 北京: 高等教育出版社,2008.
[3]华东师范大学数学系. 数学分析上册(第四版)[M]. 北京: 高等教育出版社,2010.

作者简介:

李艳青(1978.7-)，女，河南武陟人，讲师，博士，研究方向: 奇点理论及其应用。
黄得建(1980.11-)，男，河南太康人，讲师，博士，研究方向: 偏微分方程中的反问题。
林越(1981.11-)，男，海南海口人，副教授，博士，研究方向: 复杂系统建模。
蒙黄林(1972.2-)，男，海南海口人，副教授，研究方向: 统计学及其应用。