关于考研常考的一类中值定理证明题解题技巧的探究

陈焱锋
云南农业大学，中国·云南 昆明 650201

【摘 要】该文主要总结了五大类常见函数组合的辅助函数以及原函数,对于解决考研中一类函数本身与其一阶导函数或者是二阶导函数之间的组合或者是两两函数这种类似组合的不等式的证明问题具有重要作用,通过这些辅助函数或者原函数给同学们针对这类题型提供一种重要的解题思路，并通过例题使学生对该部分内容进行深一步理解。
【关键词】辅助函数；原函数；罗尔定理；考研

1 研究背景

关于考研中一种常见中值定理题型，即 $f(x)与f'(x)、f(x)与g(x)或g'(x)$ 类型的组合的不等式证明，这类题型往往很多同学无从下手，归根结底这类题型的本质是寻找辅助函数或者是原函数，然后通过罗尔定理等进一步推算便可得证,对此该文总结了五大类常见类型的辅助函数或原函数。

1.1 相关定义与定理

定理1.（罗尔定理[0]）如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间[a,b]上连续，在开区间（a，b）可导，在区间端点处的函数值相等，即 f（a）= f（b），那么在（a，b）至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f'(\xi)=0$。

定理 2.（积分中值定理[0]）如果函数 $f(x)$ 满足在积分区间[a，b]上连续，那么在[a，b]上至少存在一个点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)*f(\xi),(a<\xi<b)$。

定理 3.（积分因子法[0]）用积分因子法解线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$，将原方程改写为 $(p(x)y+Q(x))dx-dy=0$ 令 $M=P(x)y+Q(x),N=-1$ 设 $\psi(x)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial Y}-\frac{\partial N}{\partial X}}{N}$ 得 $\psi(x)=-p(x)$。故得 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$ 线性微分方程只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)=e^{\int -p(x)dx}$．于是以 μ 乘式子 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$ 两端得，$p(x)e^{\int -p(x)dx}ydx-e^{\int -p(x)dx}dy+Q(x)e^{\int -p(x)dx}dx=0$ 经移项变形整理可得：$Q(x)e^{\int -p(x)dx}dx=yde^{\int -p(x)dx}+e^{\int -p(x)dx}dy$

2 关于考研中六种常见类型的几个辅助函数或原函数的推导及证明

引例：设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且 f(a) =f（b），求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$。。①

证明：令 $F(x)=(e^{2x})*f(x)$

$\because F(a)=F(b)=0$

$\therefore$ 至少$\exists$一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$，$\therefore$等式得证

2．1 类型一：证明含有 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，辅助函数：$F(x)=(e^x)*f(x);$；

证明：利用积分因子法找到辅助函数：$\left((e^{\int 1dx})*f(x)\right)'=0$

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

$\rightarrow ((ex)*f(x))' = 0$ ∴得辅助 $F(x)=(e^x)*f(x)$

原理：$\because F'(x)=e^x*(f'(x)+f(x))$ 且 $e^x>0$，要证∃一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，当我们证明到∃一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即可说明 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，于是对于这类型我们可把辅助函数设为 $F(x)=(e^x)*f(x)$

推广：若 $f'(x)+k*f(x)=0\ (k\neq0)\rightarrow F(x)=(e^{kx})*f(x)$

同理可证：利用积分因子法得：

$((e^{\int kdx}))*f(x))'=0\rightarrow((e^{kx})*f(x))'=0$

∴得辅助 $F(x)=(e^{kx})*f(x)$

例：设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且f(a)=f(b)=0，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$。②

证明：令 $F(x)=(e^{-2x})*f(x)$

$\because F(a)=F(b)=0$

∴至少 ∃一点，$\xi\in(a,b)$ 使 $F`(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$ ∴不等式即证

2.2 类型二：$\xi*f'(\xi)+n*f(\xi)=0$，辅助函数 $F(x)=(x^n)*f(x)$；

证明：令 $x*f'(x)+n*f(x)=0$，对等式进行移项后变形得：$f'(x)+\left(\frac{n}{x}\right)*f(x)=0$

同理利用积分因子法得：$\left(\left(e^{\int\frac{n}{x}dx}\right)\right)*f(x))'=0$

$\rightarrow(x^n*f(x))'=0$ ∴→ $F(x)=(x^n)*f(x)$（注：x=0无意义）

推广到 $f(x)$ 前面系数为 $-n$ 时，即：$\xi*f'(\xi)-n*f(\xi)=0$ 利用同样的方法，我们可得到式的辅助函数 $F(x)=(x^{-n})*f(x)$

2.3 类型三：$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ ……(1)，原函数 $F(x)=f(x)*g(x)$ ….. (2)；

通过更改函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及相应的变形我们可以得到如下10种情形，也是考研中常考的10种函数类型：

①当 $f(x)=x,\ g(x)=f(x)$

代入(1)种得到 $f'(x)+x*f'(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=x*f(x)$

②当 $f(x)=x,\ g(x)=f'(x)$

代入(1)种得到 $f(x)+x*f''(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=x*f'(x)$

③当 $f(x)=x, g(x)=\int_a^x f(t)dt$

代入(1)种得到 $\int_a^x f(t)dt+x*f(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=x*\left(\int_a^x f(t)dt\right)$

④当 $f(x)=f(x), g(x)=f'(x)$

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

代入(1)种 $f'(x)^2+f(x)*f''(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=f(x)*f'(x)$

除此之外我们还可以进一步得到 $f(x)$ 的原函数 $G(x)=\frac{1}{2}f(x)^2$

⑤当 $f(x)=f(x),g(x)=\int_a^x f(t)dt$

代入(1)种得到 $f'(x)*\left(\int_a^x f(t)dt\right)+f(x)*f(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=f(x)*\int_a^x f(t)dt$

除此之外我们还可以进一步得到 $f(x)$ 的原函数 $G(x)=\frac{1}{2}*\left(\left(\int_a^x f(t)dt\right)^2\right)$

⑥当 $f(x)=f(x),g(x)=\int_a^x f(t)dt$

代入(1)种得到 $f'(x)*\left(\int_a^x g(t)dt\right)+f(x)*g(x)=0\cdots(3)$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=f(x)*\int_a^x g(t)dt$

另外对(3)进行变形 $f'(x)*\left(\int_a^x g(t)dt\right)+f(x)*g(x)$

或者是 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g(x)}{\int_x^a g(t)dt}$

此两类变形并不改变原函数 $F(x)$，$F(x)=f(x)*(\int_a^x g(t)dt)$

⑦当 $f(x)=\int_a^x f(t)dt,g(x)=\int_b^x g(t)dt$

代入(1)种得到 $f(x)*\int_b^x g(t)dt+g(x)+g(x)*\int_a^x f(t)dt=0\cdots(4)$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt*\int_b^x g(t)dt$

另外对(4)进行如下四种变形：

$$f(x)*\left(\int_b^x g(t)dt\right)=g(x)*\left(\int_x^a f(t)dt\right)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\int_x^a f(t)dt}{\int_b^x g(t)dt}$$

$$\frac{f(x)}{\int_x^a f(t)dt}=\frac{g(x)}{\int_b^x g(t)dt}$$

$$\frac{\int_x^a f(t)dt}{f(x)}=\frac{\int_b^x g(t)dt}{g(x)}$$

此四变形并不改变原函数 $F(x)$，$F(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)*\left(\int_b^x g(t)dt\right)$

⑧当 $f(x)=f(x),g(x)=g'(x)$

代入(1)种得到 $f'(x)*g'(x)+(g''(x))*f(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=f(x)*g'(x)$

⑨当 $f(x)=f'(x),g(x)=g(x)$

代入(1)种得到 $f''(x)*g(x)+g'(x)*f'(x)=0$

通过(2)式子得原函数 $F(x)=f'(x)*g(x)$

⑩当表达式为 $f'(x)*g(x))-(f(x)*g'(x))=0$

我们可以联想到 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ 的导函数便包含上述表达

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

式，因此我们对于这类可借助辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

例：设 $f(x)$ 在区间[0 ， 1]上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)dx$ ．试证 ∃ $\xi\in(0,1)$ ，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ 。③

证明：令 $F(x)=x*f(x)$

$2\int_0^{1/2}xf(x)dx=\eta f(\eta)$ (积分中值定理)

$\because f(1)=2\int_0^{1/2}\mathrm{xf}(x)dx$.

$\therefore f(1)=\eta f(\eta)$即$F(1)=F(\eta)$

$\therefore$ 至少∃一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$

即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

∴不等式即证

2.4 类型四：乘法中缺 $f(x)$ 或 $f'(x)$ 或 $g(x)$ 或 $g'(x)$

通过把类型四⑧、⑨的函数相减就得到到了另一种我们常见的乘法中缺 $f(x)$ 或 $f'(x)$ 或 $g(x)$ 或 $g'(x)$ 的函数类型即 $f''(x)*g(x)-f(x)*g''(x)=0$…….⑺而此函数的原函数根据类型四⑧、⑨所得的原函数 F(x) 我们不难得到此原函数 $F(x)=f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)$

此外我们根据类型四中的⑩我们又可以得到 $F(x)$的辅助函数 $G(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

另外对⑺进行如下三种变形

- $f''(x)*g(x)=f(x)*g''(x)$
- $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $\dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{g''(x)}{g(x)}$

此三种变形并不改变原函数 $F(x)$ ，$F(x)=f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)$

例：设 $f(x)$ ，$g(x)$ 在[a，b]二阶可导 $g''(x)=0$ ，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明在(a,b)内至少存在一点 ξ ，使 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 。④

证明：令 $F(x)=f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)$

$\because F(a)=F(b)=0$

$\therefore$ 至少∃一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$

即在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 得证。

2.5 类型五：加减法中增补有限项回归到类型一进行求解

例： $f''(x)-f(x)=0$

例： $f''(x)-f(x)=0$ 找寻此类原函数，我们可以通过增补的形式，然后回归到类型一进行寻求他的辅助函数。(下面只列举这两种情况，其他情况同理)

①增补 $-f'(x)$来求解

原式 = $=(f''(x)-f'(x))+(f'(x)-f(x))=0$

而 $f''(x)-f'(x)$ 的原函数我们不难得到为 $f'(x)-f(x)$

于是原式 $=\left(f'(x)-f(x)\right)'+\left(f'(x)-f(x)\right)=0$

回到我们类型一中，可得到辅助函数

$F(x)=e^{x}*\left(f'(x)-f(x)\right)$

而在类型二中我们又可以进一步推出 $f'(x)-f(x)$ 的辅助函数为

$e^{-x}*f(x)$ 于是在证明中值定理时，$F(x)$ 的辅助函数，

我们可以进一步借用为 $G(x)=e^{-x}*f(x)$ 来进行求证。

②增补 $f'(x)$ 来求解

原式 $=\left(f''(x)+f'(x)\right)-\left(f'(x)+f(x)\right)=0$

而 $f''(x)+f'(x)$ 的原函数我们不难得到为 $f'(x)+f(x)$

于是原式 $=\left(f'(x)+f(x)\right)'-\left(f'(x)+f(x)\right)=0$

回到我们类型二中，可得到辅助函数

$F(x)=e^{x}*\left(f'(x)+f(x)\right)$

而在类型一中我们又可以进一步推出 $f'(x)-f(x)$ 的辅助函数为 $e^{-x}*f(x)$ 于是在证明中值定理时，$F(x)$ 的辅助函数，我们可以进一步借用为 $G(x)=e^{x}*f(x)$ 来进行求证。

例：设奇函数 $f(x)$ 在[－1，1]上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：(I) 证明 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$ (II) $\exists\beta\in(-1,1)$，使得 $f''(\beta)-f'(\beta)=1$ ⑤

(I) 证明：令 $F(x)=f(x)-x$

$F(1)=f(1)-1=0\quad F(0)=f(0)-0=0$

$\therefore$ 至少$\exists$一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$

即存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$

(II) 证明：原式 $=f''(x)=f'(x)=1+0$

即 $\left(f''(x)-1\right)-\left(f'(x)-0\right)=0$

$\rightarrow\left(f'(x)-x\right)'-\left(f'(x)-0\right)=0$

令 $F(x)=e^{-x}*\left(f'(x)-x\right)$

$F(0)=0\quad F(1)=0$ 即 $F(0)=F(1)$

$\therefore$ 存在 $\beta\in(-1,1)$，使得 $F'(\beta)=0$ 即存在 $\beta\in(-1,1)$，使得 $f''(\beta)-f'(\beta)=1$

3 结语

该文通过引例引出考研中最常见的一种中值定理证明题，并针对此种题型，一共总结了考研此类中值证明题的五大常见的类型，而每种类型关于寻找的原函数或者是辅助函数都给予了推广以及说明，并用罗尔定理等相关定理进行了相应的证明，且通过例题加深同学们的理解，为同学们在解此种类型题目提供一种重要的解题思路。

注释:

①汤家凤.考研数学接力题典1800[M]北京: 中国原子能出版社，2019.20.

②汤家凤.考研数学接力题典1800[M]北京: 中国原子能出版社，2019.113.

③1996年数学三全国硕士研究生招生考试试题.

④1995年数学一全国硕士研究生招生考试试题.

⑤2013年数学一、二全国硕士研究生招生考试试题.

参考文献:

[1]同济大学数学系.高等数学上册.第7版[M].高等教育出版社,2014.126-127.

[2]欧阳光中.数学分析.第4版[M].高等教育出版社,2018.213-214.

[3]朱思铭,周之铭,王高雄等;常微分方程.第4版[M]北京:高等教育出版社,2020.36-4.

作者简介:

陈焱锋（2000.08—），男，汉族，江西省赣州市，云南农业大学，本科在读；研究方向：电气工程及其自动化。