Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

一道试题的不同解法与思考

蔡源淮

昆三中呈贡学校（呈贡一中），中国·云南 昆明 650500

【摘　要】本文通过对一道试题的不同解法，分析思考从直线上一个动点出发看一条线段，动点在什么位置时视角最大问题，并推广到动点在一个圆上看一条线段视角最大的问题。

【关键词】视角

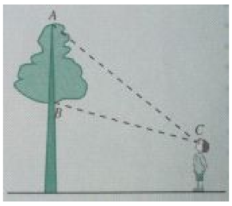
1　问题提出：

普通高中课程标准实验教科书人民教育出版社数学必修五A版，3.4《基本不等式》第113页习题3.4B组第2题

如图，树顶A离地面 a m，树上另一点B离地面 b m，在离地面 c m的C处看此树，离此树多远时视角最大？

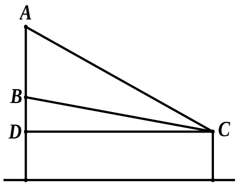
1.1 教学参考书给出的解答：

解法一：过点C作 $CD\perp AB$，交AB延长线于点D. 设 $\angle BCD=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，$CD=x$.



在△BCD中，$\tan\alpha=\dfrac{b-c}{x}$，

在△ACD中，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{a-c}{x}$，



则 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$$=\frac{\frac{a-b}{x}}{1+\frac{a-c}{x}\cdot\frac{b-c}{x}}=\frac{a-b}{x+\frac{(a-c)(b-c)}{x}}$$

$$\le\frac{a-b}{2\sqrt{x\cdot\frac{(a-c)(b-c)}{x}}}=\frac{a-b}{2\sqrt{(a-c)(b-c)}}$$

当且仅当，$x=\dfrac{(a-c)(b-c)}{x}$，既 $x=\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时 $\tan\beta$ 取得最大，从而视角也最大.

1.2 方法拓展

解法二：（余弦定理）

过点C作 $CD\perp AB$，交A B延长线于点D. 设 $\angle BCD=\alpha$，$CD=x$.

$AD=a-c=m, BD=b-c-n$，则 $AB=a-b=m-n$.

在 Rt △BCD中，$CB=\sqrt{x^2+n^2}$，在 Rt △ACD中，$CA=\sqrt{x^2+m^2}$，在△ACD中，由余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{\left(\sqrt{x^2+n^2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+m^2}\right)^2-(m-n)^2}{2\sqrt{x^2+n^2}\cdot\sqrt{x^2+m^2}}$$

$$=\frac{x^2+mn}{\sqrt{x^2+n^2}\cdot\sqrt{x^2+m^2}},$$

而 $$\cos^2\alpha=\frac{x^4+2mnx^2+m^2n^2}{x^4+(m^2+n^2)x^2+m^2+n^2}$$

$$=1-\frac{(m-n)^2x^2}{x^4+(m^2+n^2)x^2+m^2n^2}$$

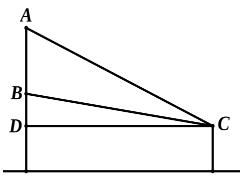
$$=1-\frac{(m-n)^2}{x^2+\frac{m^2n^2}{x^2}+m^2+n^2}$$

$$\ge1-\frac{(m-n)^2}{\sqrt{x^2\cdot\frac{m^2n^2}{x^2}}+m^2+n^2}=1-\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$$

当且仅当 $x^2=\dfrac{m^2n^2}{x^2}$ 时，即 $x=\sqrt{mn}=\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时 $\cos^2\alpha$ 取得最小，从而视角也最大.

解法三：（面积相等）

过点C作 $CD\perp AB$，交A B延长线于点. 设 $\angle BCD=\alpha$，$CD=x$.



$AD=a-c=m, BD=b-c-n$，

则 $AB=a-b=m-n$.

在 Rt △中BCD，$CB=\sqrt{x^2+n^2}$，

在 Rt △中ACD，$CA=\sqrt{x^2+m^2}$，

则 $S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{2}CD\cdot AB=\dfrac{1}{2}CB\cdot CA\cdot\sin\alpha$，

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

从而 $\sin\alpha=\dfrac{(m-n)x}{\sqrt{x^2+n^2}\cdot\sqrt{x^2+m^2}}$.

所以 $\sin^2\alpha=\dfrac{(m-n)^2x^2}{x^4+(m^2+n^2)x^2+m^2n^2}$

$$\le\frac{(m-n)^2}{\sqrt{x^2\cdot\dfrac{m^2n^2}{x^2}}+m^2+n^2}=\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$$

当且仅当 $x^2=\dfrac{m^2n^2}{x^2}$，即 $x=\sqrt{mn}=\sqrt{(a-c)(b-c)}$

时 $\sin^2\alpha$ 取得最大，从而视角也最大.

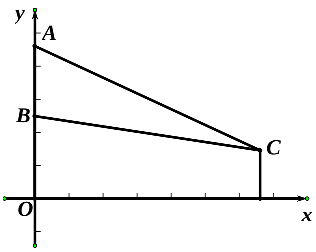
解法四：如图建立平面直角坐标系，设 $C(x,c)$，

则 $A(0,a)$，$B(0,b)$.

$CA=(-x,a-c),CB=(-x,b-c)$.

$$\cos\angle BCA=\frac{CA\cdot CB}{|CA|\cdot|CB|}=\frac{x^2+(a-c)(b-c)}{\sqrt{x^2+(a-c)^2}\sqrt{x^2+(b-c)^2}}$$

设 $a-c=m,b-c=n,$



以下解法同解法二.

解法五：（平面几何）

如图，分别作 AB、BC 的垂直平分线 DF、EF，交于 F，则圆 F 是△ ABC 的外接圆，延长 DF 交圆 F 于 G，连结 AF、AG、FC，过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，则 $\angle ACB=\angle AGB=\angle AFD$.

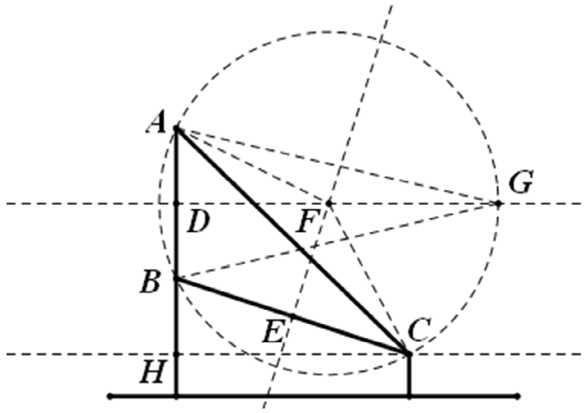
由于 $\sin\angle AFD=\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{\frac{a-b}{2}}{FC}$，要 $\angle AFD$ 最大，

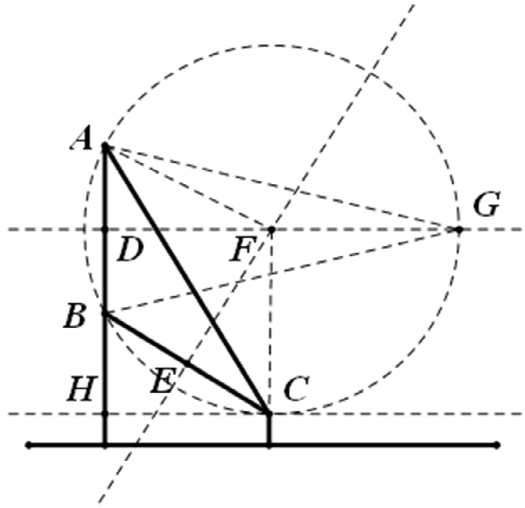
即要 FC 最小.

F、C 分别在直线 DF、CH 上，而 DFpCH，

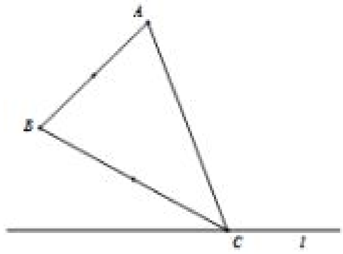
当 FC=HD 时最小，即 $FC=\dfrac{a+b}{2}-c$（圆 F 恰好与 CH 相切），此时 $DF=\sqrt{FC^2-AD^2}=\sqrt{(a-c)(b-c)}$.

所以离此树 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时视角最大.

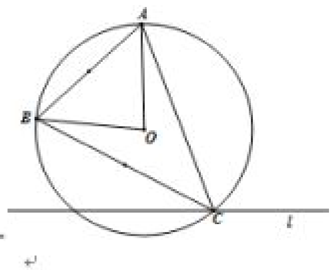




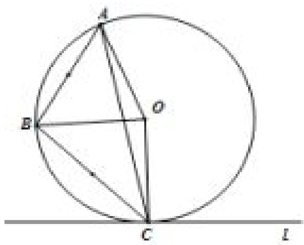
2　问题拓展：



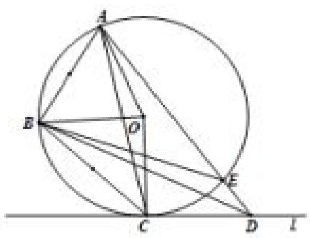
图一



图二



图三



图四

2.1 如图一，在直线 l 上一点 C 看线段 AB，C 点在什么位置视角最大？

Educational Teaching,教育教学,(3)2021,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

作△ABC的外接圆O，连结OA、OB（图二），则$\angle AOB=2\angle ACB$，要$\angle ACB$最大，即要$\angle AOB$最大. 由于AB的长为定值，所以即要圆O的半径最小，如图三作过A、B两点且与直线l相切的圆，此时从切点C看线段AB视角最大.

证明，在l上任取一点D，连结DA、DB，设DA交圆O于E，如图四，则

$$\angle ACB=\angle AEB=\angle EBD+\angle ADB>\angle ADB,$$

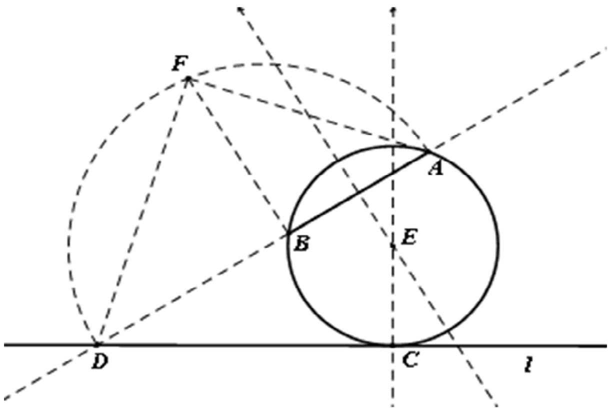
故$\angle ACB$最大.

如何作出这样的圆？其实就是求作经过两个定点且与已知直线相切的圆，切点就是所求的点. 这是阿波罗尼斯问题的一个特例，即“点点线”. 下面给出一种作图方法：

延长AB交直线l于D，以AD为直径作半圆，过B作直线$BF\perp AD$交半圆于F，连结FD、FA，则$FD^2=DB\cdot DA$.

在直线l上取C点，使DF=DC，作过A、B、C三点的圆，由于$FD^2=DB\cdot DA$，

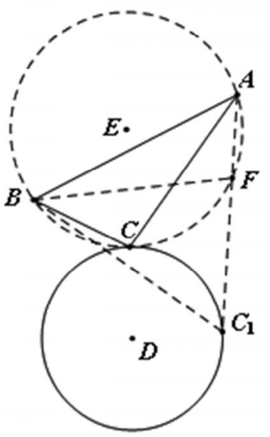
所以直线l是圆E的切线.



2.2 在圆D上一点C看线段AB，C点在什么位置视角最大？

如图，我们可以类比在直线上的情况猜想：过ABC的圆与圆D相切时切点C就是所求的点. 下面给出证明。

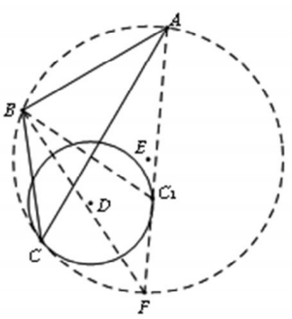
证明：如图，过AB作圆E与圆D相外切于点C，在圆D上任取一C_1点，连结AC_1、BC_1，设AC_1与圆E交于点F，连结BF.



因为$\angle AFB$是△BC_1F的外角，故$\angle AFB>\angle AC_1B$，

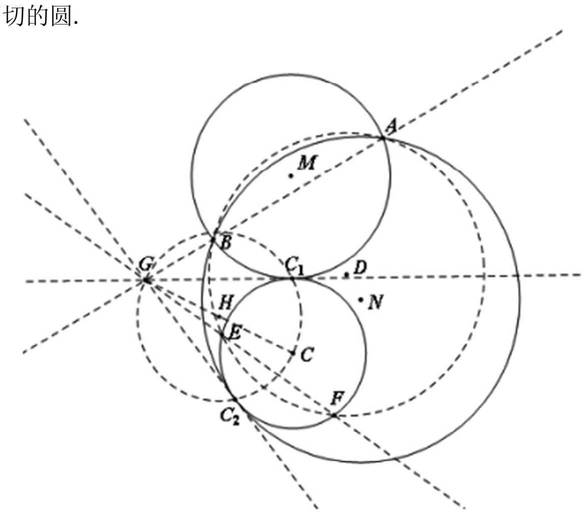
而$\angle ACB=\angle AFB$，所以$\angle ACB>\angle AC_1B$，从而可得$\angle ACB$最大.

当过AB作圆E与圆D相内切于点C，在圆D上任取一点C_1，同理可证$\angle ACB<\angle AC_1B$. 此时$\angle ACB$最小.



故提出问题：过两定点A、B能否做出与已知圆相切的圆？这样的圆有几个？这也是阿波罗尼斯问题的一个特例，即“点点圆”. 下面给出一种作图方法：

如图，已知定点A、B，和定圆C，求作过A、B且与圆C相切的圆.



作法：

（1）过A、B任意作圆D与圆C相交于E、F两点，作直线EF交直线AB于G，可以证明G点是确定的点（与圆D位置无关）.

（2）下面我们只需作过G点且与圆C相切的两条切线. 连结CG，以CG为直径作圆H交圆C于C_1、C_2两点，则CG_1、CG_2就是过G点且与圆C相切的两条切线.

（3）分别过ABC_1和ABC_2作圆M、N，此时圆M与圆C外切，圆N与圆C内切.

综上所述：在直线l上一点C看线段AB，C点在什么位置视角最大的问题，就是求作经过两个定点且与已知直线相切的圆，切点就是所求的点.

在一个圆上一点看线段，点在什么位置视角最大的问题，就是求作经过这两个点且与圆相切，切点就是所求的点.

参考文献:

[1]黄永生,杨丹.一道试题的解法思考与改编[J].福建中学数学,2016,000(010):14-15.

[2]付巍.一道解析几何试题的解法研究与变式思考[J].数学通报,2011,50(11):42-45.

[3]曾皓.一道高考题的解法探究与思考[J].中学数学教学参考:上旬,2015,000(11X):56-58.