

从学生的角度剖析《概率论与数理统计》中的难点内容

张梦琇¹ 曾晓美²

1 石河子大学理学院, 中国·新疆 石河子 832000
 2 乌鲁木齐市第八十中, 中国·新疆 乌鲁木齐 830000

【摘要】 本篇文章主要从学生角度剖析《概率论与数理统计》中的难点内容, 通过教师在课下与学生的交谈, 总结出容易出错的几个方面。本篇文章主要从全概率公式、随机变量的分布函数和假设检验三方面内容剖析学生听不懂, 易出错的原因, 而从帮助授课教师在讲授相关内容时, 注重引导学生, 以学生已有的知识为基础来讲授新的知识。

【关键词】 样本空间的划分; 全概率公式; 随机变量的分布函数; 小概率事件; 假设检验

【基金项目】 2020年石河子大学校级混合式教学改革项目: 基于核心素养的概率论与数理统计(专业课)混合式教学改革探索; 2020年石河子大学校级混合式教学改革项目: 构建工科类《线性代数》教、学、练、考、评闭环的混合式教学; 2021年石河子大学校级课程思政《概率论与数理统计》。

本篇文章主要从学生角度剖析《概率论与数理统计》中的难点内容, 学生在学习《概率论与数理统计》的过程中, 认为这门课程计算量较大并且不易理解, 尤其是教师在讲授全概率公式、随机变量的分布函数、假设检验等内容时, 既不好理解, 又容易出错。而对于教师而言, 多数教师认为讲授《概率论与数理统计》这门课课时较少, 不能合理地分配好概率论与数理统计两部分地讲授时间, 多数学生在学习统计部分内容时, 表现出听不懂、学不懂等状态, 为了帮助教师更好地讲授《概率论与数理统计》这门课程, 我利用课下时间与学生进行交谈, 总结学生容易出错的几部分内容。本篇文章主要从全概率公式、随机变量的分布函数和假设检验三部分内容, 剖析学生学不懂、易出错的原因, 从而帮助教师高效的讲授这三方面的内容, 提高教师的备课效率。

1 全概率公式

1.1 剖析学生学习全概率公式的困难之处

学生在学习全概率公式时, 能熟练掌握全概率的公式的内容, 常常出现问题的地方在于样本空间的划分, 学生在利用全概率公式求解相关事件的概率时, 对于较为复杂的事件, 样本空间的划分存在困难, 不知道如何划分该样本空间, 极少数同学将全概率公式与多个事件的和事件公式搞混, 如下述两个例题:

例1由以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下效果: 被诊断者患有癌症, 试验反应为阳性的概率为0.95; 被诊断者未患有癌症, 试验反应为阴性的概率为0.98。现对自然人群进行普查, 设被实验的人群中患有癌症的概率为0.005, 求: 已知试验反应为阳性, 该被诊断者确有患癌症的概率?

分析: 该例题研究自然人群中试验反应为阳性, 该被诊断者患有癌症的概率, 自然人群中分为患有癌症和未患有癌症两类, 同时根据试验反应的结果, 也可以将自然人分为试验反应为阳性和阴性两类, 因此, 针对本题目的研究对象自然人而言就有两种不同的划分方式。利用全概率公式求解复杂事件的概率时, 最重要的环节就是样本空间的划分, 合适的划分是求解问题的关键。

	患有癌症	未患有癌症
试验反应成阳性	患有癌症并且试验反应呈阳性	未患有癌症并且试验反应呈阳性
试验反应成阴性	患有癌症并且试验反应呈阴性	未患有癌症并且试验反应呈阴性

本例题将自然人群按照是否患有癌症进行划分求解事件的概率。具体分析情况如下表:

解: 设A表示“患有癌症”, \bar{A} 表示“没有患有癌症”, B表示“试验反应为阳性”, 则由条件得:

$$P(A) = 0.005, P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.995$$

$$P(B|A) = 0.95, P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.98$$

$$\text{由此 } P(B|\bar{A}) = 1 - 0.98 = 0.02$$

有贝叶斯公式得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \approx 0.193$$

注意: 容易出现错误的地方就是将自然人群按照试验反应的结果去划分。样本空间的划分依据要结合事件的实际情况和题目中所给的已知条件, 而不是我们主观地划分样本空间, 这样会增加解决问题的难度。

例23人独立地破译一个密码, 他们能破译的概率分别为

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \text{ 求将此密码破译出的概率?}$$

分析: 该例题研究的是密码被破译, 密码破译包含的情况很多, 可以是一人破译密码、两人破译密码, 也可以是三人都破译了密码, 而题中只给出了三人能破译密码的概率, 因此这道题采用三个事件的和事件公式来求最为准确, 具体解法如下:

解: 设这三个人分别为甲、乙、丙, 设A表示“密码由甲破译”, B表示“密码由乙破译”, C表示“密码由丙破译”则由已知条件得:

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4},$$

所以, 有

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{3}{5}$$

注意: 极少数的学生将题意弄错认为所求的密码破译是指三个人有且只有一个人破译成功, 因此选择全概率来求解此题。

1.2 教师讲授全概率公式的过程

教师在讲授全概率公式时, 要注意引导学生, 样本空间的划分要结合求解的题目, 在求解问题之前要学会分析题目的含义, 将题目数学化, 弄清楚所求事件与条件之间的关系, 如果这道题采用全概率公式求解, 一定要弄清楚如何划分样本空间, 可以在求解问题之前将样本空间列出来, 找寻求解事件、已知条件和样本空间的关系, 从而确定样本空间划分依据, 再利用全概率公式求解相关问题。

2 随机变量的分布函数

2.1 剖析学生学习随机变量的分布函数的困难之处

在讲授随机变量的分布函数之前, 学生已经熟练掌握函数的相关知识, 随机变量是指将样本空间中的样本点与数集中的数相对应, 学生可以将随机变量类比作函数, 但描述随机变量的分布情况的分布函数多数学生认为抽象、不易理解, 容易出现问题的地方在于, 随机变量分布函数的性质, 利用随机变量的分布函数的性质判断该函数是否是某一随机变量的分布函数、利用分布函数求事件的概率等, 学生对这些知识点掌握情况较差, 多数学生看到相关问题直接跳过, 不去求解。

2.2 教师讲授随机变量的分布函数的过程

教师在讲授随机变量的分布函数及其性质时, 应该从“集合”的角度让学生去理解新的知识, 概率论中事件的实质就是样本空间的子集, 随机事件的分布函数就是求解事件 $\{X \leq x\}$ 所发生的概率, (其中 X 表示随机变量, x 表示任意实数), 很多学生对随机变量分布函数的定义内容不理解, 弄不清楚这个函数和随机变量之间的关系, 教师在讲授随机变量的分布函数定义时, 可以结合学生已有的函数的相关知识介绍分布函数, 随后再来说明分布函数与随机变量之间的关系, 最后介绍随机变量分布函数的性质, 介绍分布函数的性质可以采用具体例题的分布函数的图像来介绍, 函数图像直观、易于理解。

3 假设检验

3.1 剖析学生学习假设检验的困难之处

学生在学习假设检验这一章的内容时, 处于一个听不懂、不愿意听的时期, 多数学生认为这一章的内容较为困难, 不知道什么是假设检验, 也不清楚假设检验的用途。自从学生进入统计阶段内容的学习, 多数学生出现不愿意听, 不想学, 学不懂等课堂状态, 认为统计这部分内容太过抽象, 不容易理解, 由于课时安排较少, 多数学生认为这一章节内容不重要, 不是我们考试的重点, 从而忽略了这一章内容的学习。假设检验就相当于我们高中所讲授的反证法一样, 多数学生使用反证法证明习题就是“照葫芦画瓢”, 没有真正弄明白它的求解思路和表

达的含义, 假设检验也一样, 多数学生知道参数的假设检验有五个步骤, 能按照步骤来求解相关分布的参数的假设检验问题, 但不清楚每一步的含义与用途; 少部分学生根据题意不清楚应选择哪一种分布、哪一种参数的假设检验问题。因此, 假设检验这一章成为学习《概率论与数理统计》的难点, 但这一章内容是统计学部分的重点内容, 为了增加学生在这一章内容上的积极性, 教师应该从学生容易理解的“小概率事件”入手。

3.2 教师讲授假设检验的过程

教师在讲授参数的假设检验这一章内容时, 应该从小概率事件入手, 我们都知道概率的大小反应随机事件发生的可能性, 小概率事件是指在一次随机试验中, 该事件发生的可能性较小但不是不会发生, 只是发生的几率较小而已, 这些学生很容易理解, 教师要引导学生区别好不可能事件和小概率事件的差异。学生弄清楚小概率事件以后, 我们结合已有的数据, 来验证此事件在所给的数据中是否会发生, 如果所给的数据使得小概率事件一次就发生, 我们就认为我们所假设的参数不正确, 反之, 亦然。从小概率事件的角度理解参数的假设检验, 学生容易理解、容易操作, 并且知道我们是用已经给出的数据来验证我们的猜想是否正确, 如果数据使得小概率事件发生, 我们就认为我们所假设的参数是错误的, 如果所给的数据使得小概率事件, 没有发生, 我们只能判断我们所假设的参数不一定错误, 这就是假设检验的思路, 用小概率事件可以帮助学生较好、较快地理解假设检验的相关内容。

4 总结

因此, 教师在讲授《概率论与数理统计》的相关内容时, 要注意规划好概率论与数理统计两部分的授课时间, 概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的数学学科, 概率论侧重于随机现象规律的总结, 而数理统计侧重于随机现象的演绎过程。教师在讲授《概率论与数理统计》这门课程应注重引导学生, 从学生已有的知识出发, 用旧的知识引出新的知识, 帮助学生建立知识体系, 而不是零散的知识点, 要培养学生形成知识网、知识面。

本篇文章, 从学生的角度考察、剖析学生对全概率公式、随机变量的分布函数和假设检验三方面失分严重的原因, 帮助教师从学生已有的知识出发, 更高效的讲解这三方面的内容, 从而提高教师的备课效率。

参考文献:

- [1] 谢永钦. 概率论与数理统计(第三版)[M]. 北京邮电大学出版社. 2017年10月.
- [2] 同济大学数学系. 概率论与数理统计[M]. 人民邮电出版社. 2017年3月.

作者简介:

张梦琇(1994-), 女, 黑龙江人, 助教, 硕士研究生, 研究方向为概率论与数理统计。

曾晓美(1993-), 女, 新疆塔城人, 初级教师, 研究方向: 数学与应用数学。

(通讯作者: 张梦琇)