

平行四边形存在性的探究

——平移坐标法

刘远义

重庆市渝北区东和春天实验学校·中国·重庆 400000

【摘要】平行四边形存在性问题是一个难点和重点问题，今年重庆中考AB卷25题也考了平行四边形存在性问题。平行四边形存在性难在结合二次函数，不仅要解决二次函数中定点坐标，还要结合动点构成平行四边形。这里，我们主要是利用坐标平移来解决平行四边形存在性问题，而平移早在人教版七年级下册就学习了。本文主要是利用平移建立的数学模型，通过模型运用实际，解决二次函数中的平行四边形的问题。

【关键词】初中数学；二次函数；平行四边形；平移坐标法。

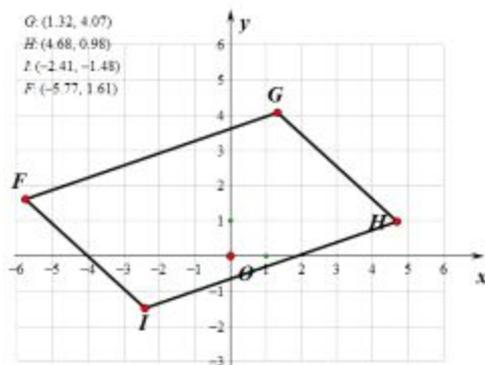
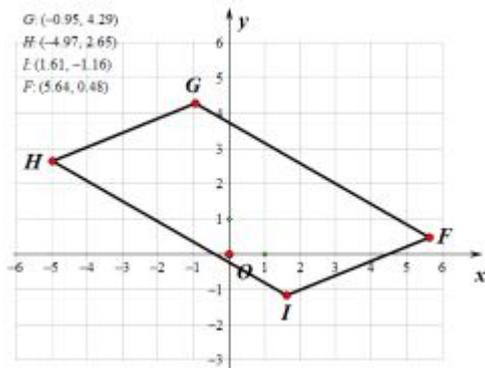
在中学数学众多知识中，二次函数的综合运用一直是一个难点，就二次函数中平行四边形的存在不仅计算是一个问题，而且寻找过程是否找全也是一个问题。对于平行四边形的存在性方法很多，但是平移坐标法作为一个模型，不仅能够完成全部的分类答案，而且可以优于其他的方法。

1 平移坐标法模型建立

1.1 平移的性质

人教版《数学》七年级（下）第七章平面直角坐标系：坐标方法的简单应用。

例：一个平行四边形可视为线段的平移，通过线段的平移得到平行四边形，则一个平行四边形的坐标具有平移特点。如图(1)(2)：



平移的性质：平移后的图像，形状大小完全相同，只有位置不同。平移后的坐标变化：对应点横坐标的变化对应相同，对应点纵坐标的变化对应相同。

线段AB平移得线段A'B'，A对应点A'，B对应点B'。若A(a, b)，B(c, d)，A'(a+m, b+n)，则B'(c+m, d+n)。通过计算变形可得，A'的横坐标与B'的横坐标和(a+c+m)，B'的横坐标与A'的横坐标的和(a+c+m)；A'的纵坐标与B'的纵坐标和

(b+c+n)，B'的纵坐标与A'的纵坐标的和(b+c+n)。换句话说：构成的平行四边形的对角线上的点，横坐标的和与纵坐标的和对应相等（即中点公式推导）。

1.2 平移坐标法的模型

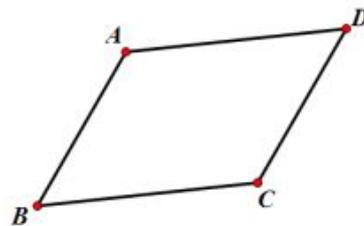
1.2.1 三个定点，求第四点。

若A、B、C、D四点构成平行四边形，已知A(a, b)，B(c, d)，C(e, f)，求D的坐标。

分析：四点构成平行四边形，有三种情况：

□ABCD，□ABDC，□ACBD

情况1：□ABCD。(如图3)



线段AB平移线段DC。设D(x, y)

A(a, b), B(c, d), C(e, f)

A、C与BD为对角线

A、C横坐标的和a+e，B、D横坐标的和c+x

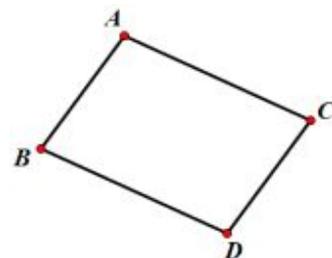
A、C纵坐标的和b+f，B、D纵坐标的和d+y

$$a+e=c+x, b+f=d+y$$

$$x=a+e-c, y=b+f-d$$

则D(a+e-c, b+f-d)

情况2：□ABDC。(如图4)



线段AB平移线段CD。设D(x, y)

A(a, b), B(c, d), C(e, f)

A、D与BC为对角线

B、C横坐标的和c+e，A、D横坐标的和a+x

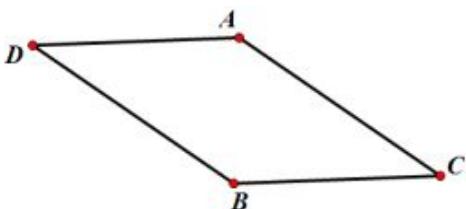
B、C纵坐标的和d+f，A、D纵坐标的和b+y

$$c+e=a+x, d+f=b+y$$

$$x=c+e-a, y=d+f-b$$

则D (c+e-a, d+f-b)

情况3: □ACBD。(如图5)



线段AD 平移线段CB。设D (x, y)

A (a, b), B(c, d), C(e, f)

A B 与 CD 为对角线

A、B 横坐标的和 a+c, C, D 横坐标的和 e+x

A、B 纵坐标的和 b+d, C, D 纵坐标的和 f+y

a+c=e+x, b+d=f+y

x=a+c-e, y=b+d-f

则D (a+c-e, b+d-f)

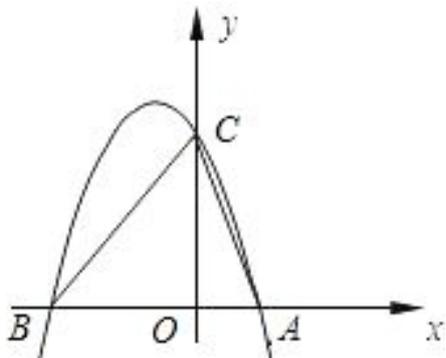
综上所述: D (a+e-c, b+f-d), D (c+e-a, d+f-b), D (a+c-e, b+d-f)

1.2.2 两个定点, 两个动点.

已知A、B的坐标, B、D为一定条件的定点。则只需要设相关未知数, 表达动点坐标。则仿照三定点, 一动点的方法依次类推, 讨论, 即可。

2 平移坐标法模型应用

例, 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴交于点C, 与 x 轴交于A、B 两点, $\tan \angle OCA = 1/3$, $S_{\triangle ABC} = 6$ 。



(1) 求点B 的坐标;

(2) 求抛物线的解析式及顶点坐标;

(3) 设点E 在 x 轴上, 点F 在抛物线上, 如果A、C、E、F 构成平行四边形, 请写出点E 的坐标。

(这里例题主要是针对(3), 前面(1)(2)求解过程省略)。

由题可求得A(1, 0), C(0, 3) 设E(N, 0), F(m, -m^2-2m+3)。

2.1 平移坐标法优越性

用直尺, 画简图, 找出可能存在的平行四边形存在的情况。

2.1.1 平行四边形两组对边相等

通过两点之间的距离公式, 组成一个方程组, 求解方程组。

如□ACEF, 则存在AC=EF, AF=CE。(计算量大)

2.1.2 平行四边形两组对边互相平行

通过互相平行直线的斜率相等, 组成一个方程组, 求解方程组。

如□ACEF, 则存在 $K_{AC}=K_{EF}$, $K_{AF}=K_{CE}$ 。(计算量大)

2.1.3 平行四边形一组对边平行且相等

通过一组对边平行直线的斜率相等, 和这组对边相等, 组

成一个方程组, 求解方程组。

如□ACEF, 则存在 $K_{AC}=K_{EF}$, AC=EF。(计算量大)

2.1.4 平行四边形对角线所分成的三角形全等

如□ACEF, 可以连接对角线通过构造三角形全等, 找出等量关系。计算量小, 但是画出平行四边形不一定可以画全。如果利用中点公式(即也可以用平移推导), 即本文推荐的平移坐标法, 则简单。但是没有把这种方法归类, 也容易忽略一两种情况, 也可能重复计算一两种情况。

2.2 平移坐标法解决问题

A(1, 0)C(0, 3), E(n, 0), F(m, -m^2-2m+3)。

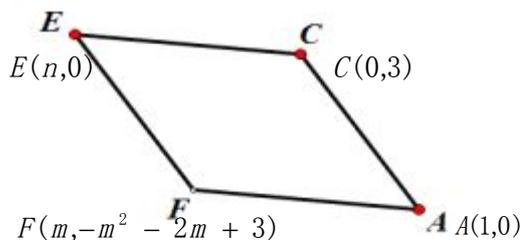
则存在三种: □ACEF 和□ACFE 和□AECF

情况1: 平行四边形ACEF

$$\begin{cases} 0+m=n+1 \\ 3-m^2-2m+3=0+0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = \sqrt{7}-1 \\ n_1 = \sqrt{7}-2 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = \sqrt{7}-1 \\ n_2 = \sqrt{7}-2 \end{cases}$$

$$\therefore E(-2-\sqrt{7}, 0), \text{ 或者 } E(-2+\sqrt{7}, 0).$$

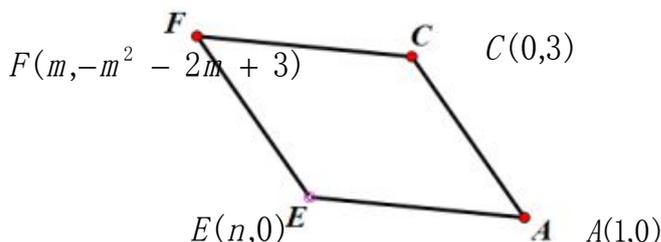


情况2 平行四边形ACFE

$$\begin{cases} 0+n=m+1 \\ 3+0=-m^2-2m+3+0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 0 \text{ (舍去)} \\ n_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = -2 \\ n_2 = -1 \end{cases}$$

$$\therefore E(-1, 0)$$

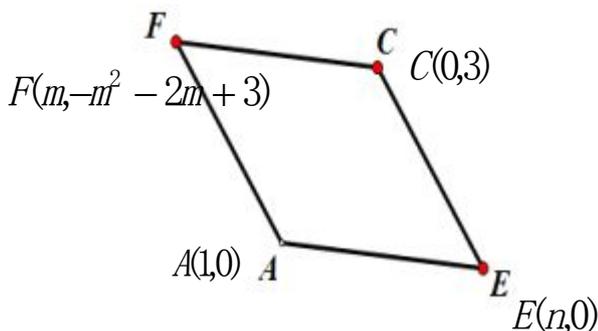


情况3 平行四边形AECF

$$\begin{cases} 0+m=n+1 \\ 3-m^2-2m+3=0+0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 0 \text{ (舍去)} \\ n_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = -2 \\ n_2 = -1 \end{cases}$$

$\therefore E(3,0)$



综 上 所 述 :

$E(-2-\sqrt{7},0), E(-2+\sqrt{7},0), E(-1,0), E(3,0)$ 。

2.3 平移坐标法小结

在含有动点求平行四边形存在问题, 使用平移坐标法的步骤:

第一步 确定定点的坐标以及设动点的坐标.

第二步 分类平行四边形 ($\square ABCD, \square ABDC, \square ACBD$).

第三步 计算并检验.

平移坐标法的特点: ①不会遗漏. 平移坐标法不需要对图形分析, 不需要画出所有的图形. ②不需证明. 平移坐标法直接根据平移的性质, 对应坐标的变化, 可以直接列出对应的式子, 直接计算出平行四边形的坐标, 避免了复杂的推理过程. 用代数的方法解决几何问题. ③不限条件. 只要是解决平行四边形存在性问题, 都可以使用平移坐标法. 不管是几个定点, 还是几个动点, 无论是二次函数, 还是一次函数, 都可以探索.

参考文献:

[1]朱咏松. 平面直角坐标系中平行四边形存在性的探究. 解题研究.

[2]相会静. 平行四边形存在性问题探究. 中小数学学报, 2014. 12月中旬(初中).

[3]人民教育出版社课程研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. 义务教育教科书教师教学用书. 数学. 七年级. 下册. 人民教育出版社, 2012. 6.

(上接230页)

王琪在《可可托海的牧羊人》中, 用苍劲与饱含故事的嗓音唱出了养蜂女与牧羊人真挚的爱情, 唤醒了人们心中对真爱的向往追寻之音。同时它也启示我们: 爱情必然是有苦有甜, 美好的爱情需要两人同心同念, 更需要双方多加沟通理解。牧羊人为了二人的约定和自我的承诺, 即便草木枯黄也不离开, 苦苦等待着养蜂女的归来; 而养蜂女却爱而不敢爱, 只为放手许心上人一个更好前程。这样思维与情愫的差异造就了阴差阳错的命运, 演绎了爱情的悲剧结局。

歌曲《可可托海的牧羊人》里面的爱情故事是虚构的, 故事里的牧羊人与养蜂女并不存在, 故事里的爱情也纯属虚构, 但艺术的真实与生活的真实永远同路同行, 爱是流行音乐不变的主题, 爱又何尝不是人们心中不变的追求?

3 追寻——人生的苦旅与远方

经济高速发展的社会, 难免物欲横流的现象, 人们追逐物质的欲望, 又苦于难以得到满足。我们说追寻的脚步是无止境的, 但满足欲望的条件却是有限的。在满足欲望的快乐昙花一现之后, 人们很快又会踏足追寻新的欲望。人的一生都在追寻, 有人追寻眼前短暂的享受, 也有人立足高远, 不断追寻着自己心中的诗与远方。而远方, 似乎是人们心中一个未知的世界与无法抵达的彼岸。可可托海不仅是一个地名, 它在哈萨克语的意思是“绿色的丛林”, 而在蒙语中的意思是“蓝色的河湾”。其实, 这首歌曲之所以如此受欢迎, 还源于可可托海是远方的代名词, 它寄托着人们对心灵皈依的热切祈盼。每个人心中都有一个可可托海, 那是心灵的归宿, 每个人心中都有一个养蜂女, 那是真爱的依托, 每个人在不同的时期, 也都是王琪——心灵流浪的歌手。

过去, 人们用一首《孟姜女》记录着孟姜女哭长城的千古佳话, 一曲《西厢记》道不尽张生与崔莺莺的西厢爱情, 《钗头凤》言说着陆游与唐婉的爱情悲歌。到当代, 阎肃用一曲

《化蝶》来歌颂梁山伯与祝英台的生死赴约, 王立平以一曲《葬花吟》惊叹《红楼梦》黛玉宝玉的惊世奇缘。而如今, 刘若英用一曲《后来》感伤着她与陈升的遗憾, 梁静茹唱着《可惜不是你》怀念与玛莎的终未牵手, 莫文蔚在演唱会上唱到《他不爱我》一度哽咽, 祭奠与冯德伦的9年长跑。

现实世界有太多无奈, 太多苦涩, 太多无法掌控的东西。世界蔓延的新冠疫情, 郑州的水灾, 阿富汗的内乱……人生是一场苦旅, 在人生苦旅中, 我们幸福的是, 有着强大的国家, 强大的政党, 我们用自己的努力, 自己的奋斗, 在阳光下随着党的指引, 跟着团队的号召, 勇往直前。歌声是行进中无言的慰藉。人们哼着歌声, 去触摸远方。不论是去远方旅行还是去到远方逐梦, 都是为了寻找心灵的归宿, 是一种看不见的灵魂里涌动的向往。千里之行始于足下, 我们踏足着人生的苦旅去追逐远方, 只要心怀美好, 定能到达精神的彼岸。

《可可托海的牧羊人》之所以能如此风靡, 主要源于它生动的歌词唱到了人们心里, 人们对爱情美好的向往, 对信仰孜孜不倦的追寻; 所有这些美好在人们心中的生根发芽, 美好的希冀永远不会磨灭, 人们怀揣着美好的嫩芽, 大步向前的去找寻生活的确幸, 追寻心中的诗与远方。只要路在脚下, 希望埋在心中, 勇敢前行的步伐便永远不会停歇。

参考文献:

[1]张冠宇.《可可托海的牧羊人》的美学意境[J], 文艺报. 2021年4月26日第004版.

[2]常柳婷.《可可托海牧羊人》中养蜂女的故事[J], 民间传奇故事(A卷), 2021-1.

[3]任卫新.《唱红了可可托海的歌》[J]. 词刊, 2021-6.

作者简介:

刘叶莹(1992.01-), 女, 湖北麻城人, 硕士学位, 助教, 武汉商学院通识教育文旅产业研究中心成员, 研究方向: 音乐表演与教学, 音乐教育。