

# 基于数学抽象核心素养培养的高中数学教学设计

## ——以《函数的概念》为例

李 菁

哈尔滨师范大学, 中国·黑龙江 哈尔滨 150025

**【摘要】**高中教育阶段的数学核心素养是关于学生终身发展所必备的数学品质,其中数学抽象作为首要的数学学科核心素养,显示了它的基础性和重要性。本文以《函数的概念》为例,基于数学抽象素养进行教学设计,主要通过实际问题情景抽象出其中的数学问题进行探究,将培养及提高学生的数学抽象素养落到实处,取得了良好的效果。

**【关键词】**数学抽象; 高中数学; 函数

### 1 绪论

本节课是2019版高中数学新教材第一册第三章第一节“函数的概念及其表示”中的第1课时——函数的概念。函数贯穿了整个高中数学课程,它是解决数学问题的基本工具,它不仅对所学过的集合做了巩固和发展,而且也是学好后续各类基本函数的基础,起着承上启下的过渡作用。

《函数的概念》作为概念教学课,可以使学生在问题探究过程,即概念的形成过程中体验从特殊到一般、类比归纳等数学思想方法,同时也关注到数学抽象等核心素养。

### 2 教学目标设置

2.1 在探究情景问题的过程中,体会从集合角度进一步学习函数的概念的必要性。能够在初中用变量之间依赖关系描述函数的基础上,用集合语言和对应关系来刻画函数,建立完整的函数概念,体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用<sup>[1]</sup>。并了解构成函数的要素。

2.2 在经历概念的形成过程后,提高数学抽象和逻辑推理等核心素养。并掌握概念形成过程的一般方法。

2.3 通过函数概念的学习过程,感受数学和生活的紧密联系,提高学习数学的兴趣。

### 3 学生学情分析

3.1 学生已有的认知基础:本节课对于他们此阶段的学生来说并不是一个陌生的概念,学生在初中阶段就已经学习了函数的一些相关知识,知道我们可以用函数描述变量之间的依赖关系。并且通过之前对于集合相关知识的学习,对应用集合相关知识来解决数学问题的意识也有所提高。同时,这个阶段的学生也有着一定的数学抽象和逻辑推理能力,这就为从集合的角度进一步学习函数的概念打下了良好的学习基础。

3.2 学生存在的知识障碍:相比于初中阶段学习的变量角度的函数的概念而言,高中利用集合的角度来研究函数的概念具有高度的抽象性。而高一年级的学生由于他们的抽象思维还不够完善,因此对函数概念及其本质的理解存在一定的困难。并且对新引入的函数符号 $f$ 也需要一个理解的过程。

### 4 教学策略分析

基于以上的分析,本节课首先以嫦娥五号探测器通过长征五号遥五运载火箭发射的视频作为开始,引导学生思考:火箭发射的过程中存在哪些变量?这些变量之间有相互关系吗?从而抽象出在变量角度上对函数下的定义。

采取教材引言部分的两个问题“正方形的周长 $l$ 与边长 $x$ 的对应关系 $l=4x$ 与正比例函数 $y=4x$ 相同吗?”、“ $y=x$ 与

$y=\frac{x^2}{x}$ 相同吗”。学生通过思考发现之前学习的变量角度的函

数知识无法解决这两个问题,于是引出从集合角度进一步学习函数的概念的必要性。

为了探求函数概念的本质,从4个问题情境入手,设计问题串展开一一的探究,通过实际问题抽象为数学问题,由特殊到一般总结出4个问题的共同特征,于是抽象概括出函数的概念。

本节课以学生为主体,倡导学生主动探究问题。使学生在感受概念的形成过程中提高数学抽象素养。

### 5 教学过程设计

#### 5.1 情境导入

思考探究1:播放长征五号运载火箭发射嫦娥五号探测器的视频,并思考以下问题(1)火箭发射的过程中存在哪些变量?(2)这些变量之间有没有关系?

预设:学生发现火箭发射的过程中存在着加速度、时间、燃料消耗质量等变量,一一对应的关系。

追问:这与我们初中阶段学习过的哪个知识有着密切的关系?

预设:学生们通过观察讨论发现与我们初中阶段学习的函数的概念有着密切的关系。

学生回顾变量角度的函数的定义。

思考探究2:(1)正方形的周长 $l$ 与边长 $x$ 的对应关系

$l=4x$ 与正比例函数 $y=4x$ 相同吗?为什么?(2) $y=x$

与 $y=\frac{x^2}{x}$ 相同吗?为什么?

预设1:两个问题都是相同的,因为他们的解析式都一样。

预设2:都不相同,不知道为什么。

预设3:不确定不相同。

[创意图]通过思考探究1利用多媒体播放嫦娥五号发射的视频,使学生感受祖国的强大激发学生的民族自豪感,激发学习数学的兴趣,从生活中的现实情境抽象出数学问题,提高学生的数学抽象素养。并且回忆起初中学习的变量角度的函数的定义。通过思考探究2同学们发现利用初中所学习的知识不能解决所提出的问题,于是形成认知冲突,为从集合的角度进一步学习函数的概念做铺垫。

#### 5.2 问题探究,形成概念

### 参考教材中的问题 1

思考 1: 问题 1 中有哪些变量?  $S$  是  $t$  的函数吗? 为什么?

预设: 路程  $S$  和时间  $t$ .  $S$  是  $t$  的函数, 因为对于每一个  $t$ , 都有唯一确定的  $S$  与之对应。

思考 2: 有人说“根据题目中的对应关系  $S=350t$ , 这趟高速列车加速到  $350\text{km/h}$  后, 运行 1 小时就前进了  $350\text{km}$ ”。你认为这个说法正确吗? 为什么?

预设: 不正确, 因为题目中说的是列车运行半小时的情况, 半小时后的情况我们不能确定。

思考 3: 你能用集合语言写出时间  $t$  与路程  $S$  的变化范围, 并分别用集合  $A_1$  和集合  $B_1$  表示吗? 集合  $A_1$  和集合  $B_1$  中的元素存在怎样的关系?

预设:  $A_1 = \{0 \leq t \leq 0.5\}$ ,  $B_1 = \{0 \leq S \leq 175\}$ ,  $S = 350t$ 。

教师引导学生发现对于集合  $A_1$  中的任一时刻  $t$ , 按照对应关系, 在集合  $B_1$  中都有唯一可以确定的路程  $S$  与之对应。

[创设意图] 通过一个实例问题抽象出数学问题, 利用 3 个思考题使学生在思考探究的过程中意识到函数是有研究范围的, 函数中变量的变化范围可以用集合的形式来表示, 并且理解集合之间的对应关系, 揭示函数的本质。

### 参考教材中的问题 2

预设:  $w=350d$ ,  $w$  是  $d$  的函数。

教师引导学生类比问题 1, 用集合  $A_2$  和集合  $B_2$  来表示工作天数  $d$  和工资  $w$  的变化范围, 并写出它们之间的对应关系。

预设:

$$A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \xrightarrow[\text{对应关系}]{w=350d} B_2 = \{350, 700, 1050, 1400, 1750, 2100\}$$

思考: 问题 1 与问题 2 的对应关系相同, 那么他们代表的是同一个函数吗? 为什么?

预设: 不是同一个函数, 因为集合的取值范围不同。

[创设意图] 通过问题 1 和问题 2 的探究过程, 学生可以发现两个函数虽然对应关系相同但变量的取值范围不同, 不能看做同一个函数。进一步揭示函数的本质。

类比问题 1 和问题 2 的研究过程, 小组合作共同探究问题 3 和问题 4。探究过程中教师给予有问题的小组适当引导。

小组展示讨论结果

$$\text{预设: } A_3 = \{0 \leq t \leq 24\} \xrightarrow[\text{对应关系}]{\text{图像}} B_3 = \{0 < I < 150\},$$

问题 3 中因为对于集合  $A_3$  中的任一时刻  $t$ , 按照相应的对应关系, 在集合  $B_3$  中都有唯一确定的空气质量指数值  $I$  与之对应, 所以  $I$  是  $t$  的

$$\text{函数。} A_4 = \{2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016\} \xrightarrow[\text{对应关系}]{\text{表格}} B_4 = \{0 < r \leq 1\} \text{ 因}$$

为对于集合  $A_4$  中的任一年份  $y$ , 按照对应关系, 在集合  $B_4$  中都有唯一确定的恩格尔系数  $r$  与之对应, 所以问题 4 中  $r$  是  $y$  的函数。

思考 1: 通过这 4 个实际的问题情景我们发现对应关系除了用解析式来表示, 还可以利用哪些形式?

预设: 图像、表格等。

思考 2: 你能试着总结一下这 4 个实例问题抽象为数学问题后的共同特征吗?

预设: 通过比较分析, 概括出 3 条共同特征。

学生通过教师的引导概述出函数的概念, 教师根据学生的概述给予适当的补充。师生共同分析出函数的三要素, 并明确对应关系符号  $f$  的由来。

[创设意图] 类比于问题 1 和问题 2 让学生进行小组讨论, 合作探究。可以借此培养学生类比推理和自主探究的能力, 使学生逐步掌握探究概念形成的过程和一般方法。并且发现函数的对应关系的表示形式除解析式外, 还可以是其他的形式。同时通过四个具体实例总结出它们的共同特征的分析过程也培养了学生由特殊到一般的数学思想以及数学抽象素养, 体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用<sup>[2]</sup>。

### 5.3 例题讲解

[例题] 试着构建一个问题情景, 使其中的变量关系可以用解析式  $y = x(10 - x)$  描述。

[创设意图] 通过例题分析, 使学生再次感受现实生活和数学的紧密联系, 并且检测学生对于本节课的学习效果, 判断学生们是否真正认识到了函数的本质。并且进一步提高学生的数学抽象素养。

### 5.4 课堂小结

师生共同总结或者由学生总结本节课所学到的数学知识以及应用到的数学思想方法, 教师予以补充。

5.4.1 数学知识: 函数的定义、函数的三要素、用集合语言和对应关系来刻画函数以及探究概念形成过程的一般方法。

5.4.2 数学思想方法: 类比推理、由特殊到一般。

[创设意图] 在教师引导学生对本节课进行总结的过程中, 学生不仅能够巩固本节课的重点, 同时还可以逐渐掌握研究数学问题的一般方法, 培养学生思考与反思的习惯。

## 6 结束语

本节课贯彻新课标的教学思想, 坚持以学生为主体、教师为主导的原则, 结合教材内容使学生经历完整的知识的发生、发展、结论的全过程, 掌握研究概念形成过程的一般方法, 在渗透类比推理和由特殊到一般数学思想的同时, 提高学生的数学抽象能力, 培养了数学抽象的核心素养, 使得学生感受到了数学的魅力和学习数学的乐趣, 取得了良好的效果。

### 参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 马宝星. 巧设问题情境提高学生的数学抽象能力——以对数函数的概念教学设计为例 [J]. 科学咨询 (科技·管理), 2020, (05): 180-181.

### 作者简介:

李菁 (1998.05—), 性别: 女, 民族: 汉族, 籍贯: 黑龙江省讷河市, 学位: (目前研究生在读), 主要研究方向: 学科教学 (数学)。