

基于数学建模思想的高等数学模块化教学研究

陈风华 李双安 龙 冰

武昌首义学院基础科学部, 中国·湖北 武汉 430064

【摘要】本文通过具体的数学模型案例分析, 阐述了数学建模思想融入高等数学模块化教学的必要性. 基于数学建模思想的高等数学模块化教学, 让学生尝试探索实际问题中所蕴涵的数学规律, 对学生应用数学的能力和学习兴趣的提高具有积极的作用. 这种融入了数学建模思想的教学探索给高等数学课程教学带来新的动力, 对于高等数学教学改革具有重要意义.

【关键词】高等数学; 建模思想; 模块化; 教学案例; 课程改革

【基金项目】武昌首义学院教学研究项目“三维协同下的微积分模块化教学的研究与实践”(2020Y21).

从上世纪 90 年代开始, 我国对模块化教学进行了初步研究探索, 在吸收国外先进理论的同时, 发展出了一套符合我国教育实情的模块教学理论. 韩艳丽(2019)将模块化教学应用在“公共关系学”中; 王丽娅(2019)将模块化教学应用在“体育与健康”课程中; 黄翠平(2017)将模块化教学应用在酒店管理专业的实践教学中等^[1-3]. 目前模块化教学多侧重于在专业课程中进行, 而关于数学课程上的模块化教学研究并不多.

传统的高等数学的教学给大多数学生的印象无非是求极限、求导数、求积分, 除了定义定理的理解, 就是根据数学公式解答课本上的题, 让学生感觉高等数学的实用性不强. 传统的高等数学教学注重学生的运算能力和逻辑推理能力的提高, 而忽视概念产生的实际背景和方法的实际应用. 高等数学教材中也多次提到知识点的应用, 但更多关注的是在相关学科中的应用, 其抽象性依然很强. 事实上, 很多简单的生活事实中也包含高等数学的知识, 更具体的案例能更好地体现知识点的应用性. 正如李大潜所提到的: “应该结合教学过程, 使学生了解到他们现在所学的那些看来枯燥无味但又似乎是天经地义的概念、定理和公式, 并不是无本之木、无源之水, 并不是从天上掉下来的, 也不是人们头脑中所固有的, 而是有其现实的来源与背景, 有其物理原型或表现的”^[4].

将数学建模思想融入高等数学的模块化教学方法主要是在分模块教学的基础上, 进一步融入数学建模的模块, 是一种嵌入式的数学建模块法^[5]. 融入数学建模思想的模块化教学对于高等数学教学改革具有重要意义. 将数学建模思想融入高等数学模块化的教学过程中, 不是将数学建模的例子强塞进高等数学的内容中, 改变高等数学的原有体系, 而是通过数学建模的过程使学生进一步熟悉基本的教学内容, 锻炼和培养学生解决问题能力的同时, 进一步加深对知识的理解与掌握.

在高等数学的教学过程中, 根据知识结构, 分四类进行模块化教学, 将建模思想融入概念、定义的模块化教学中, 如导数的概念、微分的定义、定积分的定义、二重三重积分的定义; 将建模思想融入定理的模块化教学中, 如零点定理、微分中值定理; 将建模思想融入公式的模块化教学中, 如两个重要极限、牛顿-莱布尼茨公式; 将建模思想融入实际应用的模块化教学中, 如函数的应用、最值问题的应用、微分方程的应用、级数的应用. 下面通过几个具体例子, 阐述如何将数学建模思想融入高等数学的模块化教学中.

1 建模思想融入第一个重要极限的应用

【实例一】圆的面积问题

1.1 问题提出

如何利用圆内接正 n 边形的面积求圆的面积?

1.2 模型建立

设圆的半径为 R , 记圆内接正 n 边形的面积为 A_n , 通过分

析得:

$$A_n = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n},$$

当圆内接正多边形的边数越大, 圆内接正多边形的面积越接近圆的面积, 当边数趋于无穷

大时, 圆内接正多边形的面积无限接近于圆的面积.

记圆的面积为 $S_{\text{圆}}$, 则有:

$$S_{\text{圆}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

1.3 模型求解

由前面的分析知:

$$S_{\text{圆}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}.$$

上式变形为:

$$\begin{aligned} S_{\text{圆}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi R^2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi R^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{由第一个重要极限, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \quad [6],$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi R^2 = \pi R^2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1, \quad \text{得到圆的面积:}$$

第一个重要极限是高等数学教学中的重点和难点, 具有十分重要的应用. 但在实际教学中, 往往重视其计算, 而忽略了其应用. 本文将数学建模思想融入第一个重要极限的应用,

将第一个重要极限与圆的面积求解结合起来, 有利于学生加深对第一个重要极限的理解和认知, 进而激发学生学习的兴趣, 同时也为其他教师教学提供参考.

2 建模思想融入第二个重要极限的应用

【实例二】计息还款问题

2.1 问题提出

某人民医院 2005 年 5 月 1 日进口一台彩色超声波诊断仪, 贷款 20 万元, 以复利计算, 年利率 4%, 2014 年 5 月 1 日到期, 一次还本付息, 贷款到期时还款总额 (按连续复利计息) 是多少?

2.2 模型建立

设本金为 A_0 , 年利率为 r , 如果一年分 n 期计息, 则每

期的利率为 $\frac{r}{n}$, 则

一年末的本息和为 $A_1 = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$, k 年末的本息

和为 $A_k = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}$.

如果计息期数 $n \rightarrow \infty$, 即把利息加入本金时间无限缩短, 利息随时计入本金, 称为“连续复利”计息, 则 k 年末的本息和为:

$$A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}.$$

2.3 模型求解

依题意, 2005 年 5 月 1 日到 2014 年 5 月 1 日, 由连续复利的复利公式, 则 9 年末的本息和为:

$$A_9 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{9n},$$

其中 $A_0=20$, $r=4\%$.

上式变形为:

$$A_9 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{9n} = 20 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{9r},$$

由第二个重要极限, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} = e$, 则 9 年末的本息

和为:

$$A_9 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{9n} = 20e^{0.04 \times 9},$$

所以到期还款总额为 $A_9 = 20e^{0.04 \times 9} = 28.67$ (万元).

2.4 模型推广

该模型可以推广应用, 此模型还反映了现实世界中一些事物的增长和衰减的数量规律, 如设备的折旧、资本的积累、细胞繁殖、放射性衰变、物体冷却等.

本文将数学建模思想融入第二个重要极限的应用, 让学生对第二个重要极限有更加深刻的认识, 激发学生学习的动力, 将课本的知识应用到生活中, 提高学生解决实际问题的能力.

3 建模思想融入最大值最小值问题

关于最大值最小值的例题比较常见的是用料最小化、效率最大化等等, 这些问题表面上看似很贴近我们的实际生活, 但实际上已是仅停留在课本上的例题了, 脱离了题日本来很自然的背景. 将建模思想融入最大值最小值问题当中, 需要学生参与进来, 让学生体会最大值最小值问题在我们实际问题中可以学以致用, 让他们在错综复杂的社会实践中, 认识了解社会, 抓住主要矛盾, 通过观察社会, 学会发现并提出问题.

【实例三】商品定价问题

3.1 问题提出

随着互联网技术的发展, 网上购物成为了新时尚, 它极大地方便了人们的生活, 也出现了新的经济业态. 学生通过课余时间对某网络销售平台的消费记录进行统计, 如果某款运动鞋定价为 50 元, 则平均每月收到的订单数为 3000, 但是随着定价每提高 1 元, 平均每月收到的订单数将会减少 100, 每个顾客在质保上平均花费 2 元, 商家为了获得最大的收益, 运动鞋应该定价多少?

3.2 模型建立

设 x 为运动鞋为 50 元定价时应该提升的金额 (如果 x 是负值, 则定价下调), 则收益为:

$R(x) = \text{商品收益} + \text{质保收益}$,

而商品收益等于订单数乘以定价, 质保收益等于订单数乘以质保平均花费, 即:

$$R(x) = (3000 - 100x)(50 + x) + 2(3000 - 100x), \quad x \in [-52, 30].$$

整理得:

$$R(x) = -100x^2 - 2200x + 156000.$$

3.3 模型求解

为求 $R(x)$ 使最大的 x , 先求 $R'(x)$.

$$R'(x) = -200x - 2200,$$

令 $R'(x) = -200x - 2200 = 0$, 求得 $x = -11$.

这是唯一的驻点, 又 $R''(x) = -200$, $R''(-11) < 0$, 即 $x = -11$ 为区间 $[-52, 30]$ 内的唯一的极大值点, 即为最大值点. 因此, 为了获得最大的收益, 运动鞋应该定价为 39 元, 也就是下调定价将吸引更多的人下订单, 月均订单数是 4100.

3.4 模型推广

这个模型可以推广应用, 利润等于收益减去成本, 利润函数求导等于边际收益减去边际成本, 当边际收益等于边际成本且边际收益的变化率小于边际成本的变化率时, 可以获得最大的利润.

4 建模思想融入可分离变量微分方程的应用

【实例四】饮酒量与事故风险率问题

4.1 问题提出

大量的研究所提供的数据表明, 汽车司机发生事故风险率 y (百分比) 与其血液中的酒精含量 x (单位: 毫克/100 毫升) 有非常密切的关系. 假设事故风险率变化率与事故风险率成正比, 又已知血液无酒精含量时, 事故风险率为 1%, 当血液中酒精含量为 60 毫克/100 毫升时, 事故风险率为 20%. 求

(1) 事故风险率 y 与血液中酒精含量 x 的函数关系 $y(x)$.

(2) 当血液中的酒精含量 x 是多少时, 理论上发生事故的风险率为 100%?

4.2 模型建立

根据题意, 事故风险率变化率与事故风险率成正比, 则事故风险率变化率与血液中的酒精含量有如下关系:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

这是一个可分离变量的微分方程.

4.3 模型求解

(1) 上式分离变量得到:

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

两边同时积分有:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx$$

得到:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= kx + \ln C' \\ &= \ln e^{kx} + \ln C' = \ln C'e^{kx} \end{aligned}$$

即 $y = Ce^{kx}$ (C 是任意常数).

又由已知条件 $x=0$ 时, $y=1\%$, $x=60$ 时, $y=20\%$, 得到:

$$Ce^0 = 0.01, \quad Ce^{60k} = 0.2,$$

求得: $C=0.01$, $k=0.05$,

即事故风险率 y 与血液中酒精含量 x 的函数关系为 $y = 0.01e^{0.05x}$.

(2) 由题意, 令

$$y = 0.01e^{0.05x} = 100\%,$$

$$\text{求得: } x = \frac{\ln 100}{0.050} = 92$$

即血液中的酒精含量是 92 毫克/100 毫升时, 理论上发生事故的风险率为 100%.

4.4 模型拓展

国家质量监督检验检疫局发布的《车辆驾驶人员血液、呼

气酒精含量值与检验》标准规定, 饮酒驾驶是指车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或者等于 20 毫克/100 毫升、小于 80 毫克/100 毫升的驾驶行为, 醉酒驾驶是指车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或者等于 80 毫克/100 毫升的驾驶行为.

很多驾驶员对酒精的影响作用警惕性不高, 对法律规定的“酒后驾驶”和“醉酒驾驶”的最低血液酒精含量等概念模糊, 往往在自认为只是少量饮酒的情况下出现酒驾行为. 实验证明, 用 45 分钟缓慢喝下一瓶啤酒, 5 分钟后测试结果, 酒精含量就可达到 60 毫克/100 毫升, 此时开车就已是酒驾.

通过这个数学建模案例的科学数据分析, 让学生学到了微分方程知识的同时, 也提高了青年学生的安全驾驶意识—饮酒不开车, 开车不饮酒!

5 结语

数学建模思想融入高等教学的模块化教学中可以弥补传统课堂教学中的不足, 将数学建模的思想渗透到数学定义、定理、应用的教学, 更能够帮助学生深刻理解高等数学知识, 掌握微积分的来龙去脉, 领悟数学思想、方法的产生和发展过程, 提高学生学习的积极性, 让学生找到学习数学和专业延伸的兴趣^[7].

本文通过融入数学建模思想的高等数学模块化教学的研究, 对高等数学课程建设的改革具有一定的推动作用, 包括教学内容、教学方法、教学手段等. 数学建模思想融入高等数学的模块化教学中, 能够在保障数学严谨性的同时, 利用逻辑思维扩展联系起各个数学知识之间的关系, 增强高等数学教学的内涵与生动性. 在建模的过程中, 学生能够通过多种数学知识之间的联系, 增强自己的思维创新能力, 让学生能切实感受到数学知识在实际中的应用, 更重要的是知道怎样应用和自觉去应用数学知识^[8]. 在培养学生的想象力、洞察力和创造力的同时, 培养学生的数学文化素养和职业核心能力, 让学生学到“有用的”高等数学、“够用”的高等数学, 以及“服务专业”的高等数学.

参考文献:

- [1] 林鸿钊, 李德新. 农林院校高等数学模块化教学改革思考[J]. 高教学刊, 2019, 106 (10): 122-124.
- [2] 刘照, 李秀玲. 基于OBE教育理念的高等数学模块化教学改革策略研究[J]. 长春师范大学学报, 2020, 39 (08): 164-166+187.
- [3] 贾岩. 高职数学模块化教学探究[J]. 才智, 2019 (04): 124-124.
- [4] 高珊, 王颖, 沙迪. 数学建模思想在大学数学教学中的渗透[J]. 当代教育实践与教学研究, 2019 (12): 208-211.
- [5] 李大潜. 将数学建模思想融入数学类主干课程[J]. 中国大学教学, 2006 (01): 9-11.
- [6] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [7] 陈丽娟, 李明珠, 张蕾. 新工科背景下计算方法课程实践—融入数学建模思想[J]. 高教学刊, 2020, 140 (18): 80-82.
- [8] 李伟, 吴根秀, 杨金波. 将数学建模思想融入数学类主干课程[J]. 南方农机, 2019, 50 (01): 91-92.

作者简介:

陈凤华 (1982-), 女, 硕士, 副教授, 研究方向: 最优化理论与算法研究.