弱近模糊理想

王欣欣
陇东学院 数学与统计学院，中国·甘肃 庆阳 745000

【摘 要】本文引入了模糊弱近理想的概念，证明了模糊弱近理想的交、和、积仍是模糊弱近理想.
【关键词】模糊理想；模糊近理想；模糊弱理想；模糊弱近理想

Weak near Blur Ideal

Wang Xinxin
School of Mathematics and Statistics, Longdong University, Qingyang, Gansu, China 745000

[Abstract] This paper introduces the concept of fuzzy weak near-ideal, and proves that the intersection, sum and product of fuzzy weak near-ideal are still fuzzy and weak near-ideal.
[Key words] fuzzy ideal; fuzzy near ideal; fuzzy weak ideal; fuzzy weak near ideal
【基金项目】甘肃省自然科学基金项目（NO.21JR1RM330）；甘肃省高等学校创新能力提升项目（NO.2019A-117）

1965 年，L.A.Zadeh 引入了集合 X 的模糊子集的概念，1971 年，Rosenfeld在文献[1]中首次把模糊子集的概念应用到代数研究中，开始了模糊代数系统的研究.W.J.Liu 在文献[2]中，介绍了环的模糊理想的概念；文献[3-5]中推广了环的模糊理想的概念，定义了模糊近理想、模糊弱理想、模糊伪理想、模糊虚理想，并得到了一些相应的结果。

受此启发，本文也进一步推广了环的模糊近理想的概念，引入了模糊弱近理想的概念，并且讨论了模糊弱近理想的基本性质和模糊弱近理想与模糊理想、模糊近理想之间的关系。

本文中的 R 指的是一般的结合环，其零元用 0 表示。

1 基本概念

定义 1.1[3] 设 A 是 R 的模糊子环，若对任意 $x,y\in R$，有 $A(xy+yx)\geq A(x)\vee A(y)$，则称 A 是 R 的一个模糊弱理想.

定义 1.2[3] 设 A 是 R 的模糊子环，若对任意 $x,y\in R$，有 $A(xyx)\geq A(x)\vee A(y)$，则称 A 是 R 的一个模糊近理想.

定义 1.3 设 A 是 R 的模糊子环，若对任意 $x,r\in R$，$A(xrx+rxr)\geq A(x)\vee A(r)$ 有，则称 A 是 R 的一个模糊弱近理想。

2 基本结论

引理 2.1[3] 设 A 是 R 的模糊子集，则 A 是 R 的模糊子环当且仅当对任意的 $\lambda\in[0,\ A(0)]$，A_λ 是 R 的子环.

引理 2.2[3] 设 A, B 分别是 R,R' 的模糊子环（模糊理想），$f: R\to R'$ 是同态映射. 则

（1）$f(A)$是R' 的模糊子环（模糊理想）.

（2）$f^{-1}(B)$是R 的模糊子环（模糊理想）.

定理 2.1 设 A 是 R 的模糊子环，则 A 是 R 的弱近模糊理想当且仅当对任意的 $\lambda\in[0,\ A(0)]$，A_λ 是 R 的弱近理想.

证明 $(\Rightarrow)\forall\lambda\in[0,\ A(0)]$ 由引理 1 知，A_λ 是 R 的子环. 又 A 是 R 的模糊弱近理想，对任意 $a\in A_\lambda, r\in R$，有 $A(ara+rar)\geq A(a)\vee A(r)\geq A(a)\geq\lambda$，即 $ara+rar\in A_\lambda$，故 A_λ 是 R 的弱近理想.

$(\Leftarrow)\forall a,r\in R$，令 $A(a)=\lambda$，由 A_λ 是 R 的弱近理想，$ara+rar\in A_\lambda$，

即 $A(ara+rar)\geq\lambda=A(a)$.

同理可得：定理 2.1 设 A 是 R 的模糊子环，则 A 是 R 的弱近模糊理想当且仅当对任意的 $\lambda\in[0,\ A(0)]$，A_λ 是R的弱近理想.

证明 $(\Rightarrow)\forall\lambda\in[0,\ A(0)]$ 由引理 1 知，A_λ 是 R 的子环. 又 A 是 R 的模糊弱近理想，对任意 $a\in A_\lambda, r\in R$，有 $A(ara+rar)\geq A(a)\vee A(r)\geq A(a)\geq\lambda$，即 $ara+rar\in A_\lambda$，故 A_λ 是 R 的弱近理想.

$(\Leftarrow)\forall a,r\in R$，令 $A(a)=\lambda$，由 A_λ 是 R 的弱近理想，$ara+rar\in A_\lambda$，

即 $A(ara+rar)\geq\lambda=A(a)$.

同理可得：$A(ara+rar)\geq A(r)$，即 $A(ara+rar)\geq A(a)\vee A(r)$

故 A 是 R 的模糊弱近理想.

定理 2.2 设 $f: R_1 \to R_2$ 是环同态映射，A, B 分别是 R_1, R_2 的弱近模糊理想，则 $f^{-1}(B)$, $f(A)$ 分别是 R_1, R_2 的模糊弱近理想.

证明　由引理2知，$f^{-1}(B)$, $f(A)$ 分别是 R_1, R_2 的模糊子环.

又对 $\forall x, y \in R_2$，

$$\begin{aligned} f(A)(aya+yay) &\geq \vee\{A(a_1a_2a_1+a_2a_1a_2) \mid f(a_1)=x,\ f(a_2)=y\} \\ &\geq \vee\{A(a_1a_2a_1+a_2a_1a_2) \mid f(a_1)=x,\ f(a_2)=y\} \\ &= \vee\{A(a_1)\vee A(a_2) \mid f(a_1)=x,\ f(a_2)=y\} \\ &= \vee\{A(a_1) \mid f(a_1)=x\}\vee\vee\{A(a_2) \mid f(a_2)=y\} \\ &= f(A)(x)\vee f(A)(y) \end{aligned}$$

则 $f(A)$ 是 R_2 的模糊弱近理想.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B)(xyx+yxy) &= B(f(xyx+yxy)) \\ &= B(f(x)f(y)f(x)+f(y)f(x)f(y)) \\ &\geq B(f(x))\vee B(f(y)) = f^{-1}(B)(x)\vee f^{-1}(B)(y) \end{aligned}$$

故 $f^{-1}(B)$ 分别是 R_1 的模糊弱近理想.

命题 2.1 设 $A_i(i\in I)$ 是环 R 的模糊弱近理想，则 $\bigcap_{i\in I} A_i$ 也是 R 的模糊弱近理想.

证明 $A_i(i\in I)$ 是 R 环的模糊弱近理想，则知 $\bigcap_{i\in I} A_i$ 是 R 的模糊子环. 又对 $\forall a, r \in R$，有

$$\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} A_i(ara+rar) &= \bigwedge_{i\in I} A_i(ara+rar) \geq \bigwedge_{i\in I}(A_i(a)\vee A_i(r)) \\ &= \bigwedge_{i\in I}(A_i(x))\vee\wedge(A_i(r)) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)(a)\vee\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)(r) \end{aligned}$$

故 $\bigcap_{i\in I} A_i$ 是 R 的模糊弱近理想.

命题 2.2 设 $R_i(i\in I)$ 是一簇环，是 $R_i(i\in I)$ 上的模糊弱近理想，则 $\prod_{i\in I} A_i$ 是 $\prod_{i\in I} R_i$ 的模糊弱近理想，其中

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)(f) = \bigwedge_{i\in I} A_i(f(i)), \forall f \in \prod_{i\in I} R_i = \left\{f \,\middle|\, f: I \to \bigcup_{i\in I} R_i, f(i)\in R_i\right\}$$

证明　易见 $A_i(i\in I)$ 是 $\prod_{i\in I} R_i$ 的模糊子环，又 $\forall f, h \in \prod_{i\in I} R_i$，有

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i\in I} A_i\right)(fhf+hfh) &= \bigwedge_{i\in I} A_i(f(i)h(i)f(i)+h(i)f(i)h(i)) \\ &\geq \bigwedge_{i\in I}[A_i(f(i)\vee A_i(h(i))] \\ &\geq \bigwedge_{i\in I}\left(A_i(f(i))\vee\bigwedge_{i\in I} A_i(h(i)\right) \\ &= \left(\prod_{i\in I} A_i\right)(f)\vee\left(\prod_{i\in I} A_i\right)(h) \end{aligned}$$

则 $\prod_{i\in I} A_i$ 是 $\prod_{i\in I} R_i$ 的模糊弱近理想.

命题 2.3 设 A 是 R 的模糊理想， B 是 R 的模糊弱近理想，则 A+B 是 R 的模糊弱近理想.

证明

$$\begin{aligned} \forall x, y \in R\ (A+B)(x-y) &= \vee\{A(x_1-y_1)\wedge B(x_2-y_2) \mid x_1-y_1+x_2-y_2=x-y\} \\ &\geq \vee\{A(x_1)\wedge B(x_2) \mid x_1+x_2=x\}\wedge\vee\{A(y_1)\wedge B(y_2) \mid y_1+y_2=y\} \\ &= (A+B)(x)\wedge(A+B)(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)(xy) &\geq \vee\{A((x_1+x_2)y_1+x_1y_2)\wedge B(x_2y_2) \mid x_1+x_2=x, y_1+y_2=y\} \\ &\geq \vee\{A(x_1)\wedge A(y_1)\wedge B(x_2)\wedge B(y_2) \mid x_1+x_2=x, y_1+y_2=y\} \\ &= \bigvee_{x_1+x_2=x}(A(x_1)\wedge B(x2))\wedge\bigvee_{y_1+y_2=y}(A(y_1)\wedge B(y_2)) \\ &= (A+B)(x)\wedge(A+B)(y) \end{aligned}$$

则 A+B 是 R 的模糊子环.

又

$$\begin{aligned} (A+B)(xyx+yxy) &\geq \vee\{A(x_1yx_1+yx_1y)\wedge B(x_2yx_2+yx_2y)x_1+x_2=x\} \\ &\geq \vee\{A(x_1)\wedge B(x_2) \mid x_1+x_2=x\} = (A+B)(x) \end{aligned}$$

同理可得：$(A+B)(xyx+yxy)\geq(A+B)(y)$

故 A+B 是 R 的模糊弱近理想.

命题 2.4 设 A、B 是 R 的模糊弱近理想，则 A+B 是 R 的模糊弱近理想.

证明　易证明A+B是R的模糊子环. 类似于命题2.3的证明过程可证得结论成立.

命题 2.5 设 A 是 R 的模糊近理想，则 A 是 R 的模糊弱近理想.

证明　因 A 是 R 的模糊近理想，则 A 是 R 的模糊子环. 且对 $\forall x, y \in R$，有

$$A(xyx)\geq A(x)\vee A(y), A(xyx)\geq A(y)\vee A(x)$$

Educational Teaching,教育教学,(4)2022,6
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

则 $A(xyx+yxy)\ge A(xyx)\wedge A(yxy)\ge A(x)\vee A(y)$.

故A是R的模糊弱近理想.

命题2.6 设A是R的模糊理想，则A是R的模糊弱近理想.

证明　由文献[3]及命题2.5得证.

命题2.7 设A是R的模糊弱近理想，则A不一定是R的模糊理想.

例2.1 [3]设D是二元域Z_2. 则

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0 & a & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 0 & a & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & 0 & a & a_{35}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle| a,a_{ij}\in D, 1\le i3, 3\le j\le 5\right\},$$

关于矩阵的加法和乘法作成环. 取 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

令 $N=\{0,A\}$，定义R的模糊子集 μ 为：

$$\mu=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, x=0;\\ \dfrac{1}{2}, x=A;\\ \dfrac{1}{4}, x\in R/N.\end{cases}$$

易知 μ 是R的模糊弱近理想，但由于

$\mu\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}$，$\mu\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}$，故知 μ 不是R的模糊理想.

命题2.8 设A是R的模糊弱近理想，则A不一定是R的模糊弱理想.

例2.2[6]设F是一个数域，

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0&x&y\\0&0&z\\0&0&0\end{pmatrix}\middle| x,y,z\in F\right\}$$，则R关于矩阵的加法和乘法作成环. 定义R的模糊子集A如下：

$$A\left(\begin{pmatrix}0&x&y\\0&0&z\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, z\ne 0;\\ 1, z=0.\end{cases}$$

易证A是R的模糊弱近理想. 但存在

$$r=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in R, x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in R,$$

有

$$A(xr+rx)=A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}, A(x)=\frac{1}{4}, A(y)=\frac{3}{4}.$$

则 $A(xr+rx)\le A(x)\vee A(y)$. 故A不是R的模糊弱理想.

参考文献:

[1] Rosenfeid A. Fuzzy group[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications.1971,35: 512-517.

[2] Liu Wnagjin. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1982,8(2):133-139.

[3]王晓玲.环的Fuzzy弱理想与Fuzzy近理想[J].模糊集理论与应用.1994: 315-319.

[4]姚炳学.论环的模糊伪理想[M].自然科学教学与研究.成都科技大学出版社: 20-22.

[5]姚炳学.论环的模糊虚理想[J].聊城学院学报.1997, 3: 1-4.

[6]王敦强,姚炳学.模糊n-伪理想[J].聊城学院学报.2001, 14 (4): 1-2.

作者简介:

王欣欣 (1980--)，女，甘肃环县人，副教授，研究方向: 同调代数。