Educational and teaching research, 教育教学研究 (16)2022,4
ISSN:2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

定积分计算的一些方法和技巧

蔚卓妍

(西安石油大学　电子工程学院电气工程及其自动化专业 2103　陕西　西安　710065)

摘　要：定积分的计算是工科高等数学的一个重点和难点,其常用计算方法包含牛顿莱布尼茨公式法、换元积分法、分部积分法等，它也是计算重积分、曲面积分与曲线积分的基础。但对所求原函数很复杂或者根本无法求出的情形,学生往往感到束手无策。本文另外从5个方面对定积分计算的方法与技巧进行了补充和探讨,从而开拓了解题思路,减少了计算时间,提高了运算效率。

关键词：定积分；技巧；计算方法

中图分类号 O172

Some methods and techniques of fixed integral calculation

Wei Zhuoyan

(Electrical Engineering and Automation, School of Electronic Engineering, Xi‘an Petroleum University 2103, Xi’an shanxi，710065)

Abstract: The calculation of definite integral is a key and difficult point in higher mathematics of engineering. Its common calculation methods include Newton Leibniz formula method, integration by substitution, integration by parts, etc. It is also the basis for calculating multiple integrals, surface integrals and curve integrals. However, students often feel helpless when the original function is very complex or can not be solved at all. In addition, this paper supplements and discusses the methods and skills of definite integral calculation from five aspects, thus expanding the idea of solving problems, reducing the calculation time and improving the calculation efficiency.

Key words: definite integral; skill; computing method

0 引言

定积分是高等数学中的一个基本问题，而定积分计算是一个最重要的问题，它在好多实际问题中有着广泛的应用，常见定积分计算方法有定积分的定义、牛顿莱布尼茨公式、换元积分法、分部积分法等，上述方法的核心问题是求出原函数，但是对于不能直接求出原函数的定积分，或者被积函数比较复杂，往往是比较难求出原函数，从而无法利用牛顿莱布尼茨公式求解，有些定积分运算的技巧性较强，本文针对几种特殊类型的积分，给出了逆向思维在求解定积分的应用、巧用一些特殊公式简化积分运算、利用区间的对称性和被积函数的奇偶性简化运算等，除此之外，本文列举了一些常见的技巧和方法，在提高定积分计算能力的同时，往往能够达到事半功倍的效果 .

1 根据定积分的几何意义计算定积分

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义，设函数$f(x)$在 [a,b] 上连续；

（1）若在 [a,b] 上，$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值表示由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$，曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积 [3].

（2）若在 [a,b] 上，$f(x)\leq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值表示由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$，曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形面积的相反数 [3].

（3）若在 [a,b] 上，$f(x)$有正有负，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值表示由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$，曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形在x轴上方的面积减去x轴下方的面积 [3].

例 1. 求定积分$\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

分析：本题常见思路是利用牛顿莱布尼茨公式求出原函数，首先把被积函数$\sqrt{2ax-x^2}$配方为$\sqrt{a^2-(x-a)^2}$，然后利用三角换元令$x-a=a\sin x$，变成三角函数的积分，利用降次公式求出原函数，计算量大，且容易出错，如果能考虑思维的逆向，利用定积分几何意义构造规则的几何图形，问题就迎刃而解 .

解：由定积分的几何意义知，该积分在几何上表示由直线$x=0$，$x=a,y=0$以及圆$(x-a)^2+y^2=a^2$所围成图形的面积，即该积分值为圆面积的$\frac{1}{4}$，所以$\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$.

小结：利用定积分的几何意义计算定积分只能做一些特殊的积分题，因为它必须要求所围成的曲边梯形是规则的几何图形，如三角形、圆形、矩形等，规则图形的面积有公式可算出，因此才可求出相应定积分的值 .

2. 利用一些巧妙公式计算定积分

在一些特殊的定积分的计算过程中，运用一些特殊的公式和技巧可以使定积分的计算简

化 . 本刊 2004 年 6 期已经讲了一些具体的公式，下面只做以补充 .

[公式 1] 设二次方程$ax^2+bx+c=0$存在二相异实根α,β，（$\alpha<\beta$）则：$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=-\frac{\alpha}{6}(\beta-\alpha)^3$.

此结果应用广泛且十分方便，特别是涉及抛物线与直线，及计算抛物线包围的面积等问

题更为有用 .

计算定积分$\int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}}(1+4x-x^2)\mathrm{d}x$.

解：因为$2+\sqrt{5},2-\sqrt{5}$是$1+4x-x^2$的两根，设$\alpha=2-\sqrt{5}$，$\beta=2+\sqrt{5}$

所以由公式 1 得$\int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}}(1+4x-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}(2+\sqrt{5}-2+\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}$.

定积分的计算问题中，有一类特殊类型积分，积分区间具有对称性，或者被积函数具有奇偶性以及被积函数图形的对称性等特征，对此类问题，本文总结了一些实用的简化计算方法，供大家参考 .

[公式 2] 定义在整个实轴上的函数$f(x)$总可以表示为一个奇函数和偶函数之和 . 即设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，令$H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，（其中$H(x)$为偶函数，$G(x)$为奇函数），则有$f(x)=H(x)+G(x)$，从而有

$$\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left(H(x)+G(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}H(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x.$$

推论 1：设$f(x)$ $g(x)$在$[-a,a]$上连续，$g(x)$为偶函数，且$f(x)$满足条件

$f(x)+f(-x)=A$（A 为常数），则$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$.

推论 2：设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数}\end{cases}.$$

例 3 . 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\sin^2 x\mathrm{d}x$.

分析：本题被积函数复杂，原函数不宜求出来，所以，牛顿莱布尼茨公式失效，仔细观察发现积分区间对称，可以考虑奇偶性

Educational and teaching research, 教育教学研究 (16)2022,4
ISSN:2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

简化，但是被积函数非奇非偶，无法利用推论 2，此时被积函数可以分为两部分，一部分是 $\sin^2 x$，为偶函数，另外一部分 $\frac{e^x}{1+e^x}$ 满足 $\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 为常数，从而可以考虑推论 1.

解：令 $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$，$g(x)=\sin^2 x$

因为 $f(x)+f(-x)=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=1=A$,g(x) 为偶函数

所以由推论 1 得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\cdot\sin^2 x\mathrm{d}x=1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

例 4 . 计算定积分 $\int_{-a}^{a}\sin x\cdot\ln(1+e^x)\mathrm{d}x$.

解：由公式 2 得

$$\int_{-a}^{a}\sin x\cdot\ln(1+e^x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\sin x\cdot\ln(1+e^x)+\sin(-x)\cdot\ln(1+e^{-x})\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\sin x\cdot\ln(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}})\mathrm{d}x=\int_0^a x\cdot\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\sin a-a\cos a.$$

小结：此公式在处理积分区间对称，被积函数不具有奇偶性时比较方便 .

我们知道，如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，若函数为奇函数，则其图形关于原点对称，即如果点 $P(x,f(x))$ 是图像上的点，则它关于原点对称的点 $P'(-x,-f(x))$ 也在该图形上，本文将此结论进一步推广，从而有如下简化公式 .

［公式 3]设函数 $f(x)$ 在 $[h-a,h+a]$ $(a>0)$ 上连续，(h,k) 在 $f(x)$ 的图像上，且 $f(x)$ 的图像关于点 (h,k) 成中心对称图形（即 $f(x)=-f(2h-x)+2k$ ），则有：$\int_{h-a}^{h+a}f(x)\mathrm{d}x=2ak$.

推论 1：设函数 $f(x)$ 在 $[h-a,h+a]$ $(a>0)$ 上连续，$f(x)$ 关于点 $(h,0)$ 中心对称，则有：$\int_{h-a}^{h+a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

推论 2：设函数 $f(x)$ 在 $[h-a,h+a]$ $(a>0)$ 上连续，$f(x)$ 关于直线 $x=k$ 轴对称，则有：$\int_{h\ \ a}^{h+a}f(x)\mathrm{d}x\quad 2\int_{h}^{h+a}f(x)\mathrm{d}x$.

推论 3：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称，则有：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 5 . 证明 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$

证明 令 $F(x)=(\frac{\pi}{2}-x)f(\sin x),\ x\in[0,\pi]$

对于 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$F(\frac{\pi}{2}-x)+F(\frac{\pi}{2}+x)=0$，所以 $F(x)$ 以 $(\frac{\pi}{2},0)$ 为对称中心，由推论 1 得 $\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)f(\sin x)\mathrm{d}x=0$.

故 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

例 6. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

解：设 $f(x)=\ln(1+\tan x)$，$h-a=0,h+a=\frac{\pi}{4}$，则 $h=a=\frac{\pi}{8}$.

从而 $f(2h-x)=f(\frac{\pi}{4}-x)=-f(x)+\ln 2$，即 $f(x)=-f(\frac{\pi}{4}-x)+\ln 2$

设 $2k=\ln 2$，则 $k=\ln\sqrt{2}$，曲线 $f(x)=\ln(1+\tan x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上关于点 $(\frac{\pi}{8},\ln\sqrt{2})$ 成中心对称，由公式 3 得，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=2ak=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$.

小结：利用这些结论，计算某些类型的定积分，尤其是计算某些被积函数不易求得的定积分，简单而且使用 .

3. 构造方程（组），用方程（组）思想来处理定积分问题

例 7 . 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：令 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

则 $I_1+2I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ （1）

$$I_1-2I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-2\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0 \quad（2）$$

（1）式与（2）式联立得 $I_1=\frac{\pi}{8}$.

小结：当被积函数的分母为两项，而分子为分母中其中一项的积分，利用方程（组）思想有望成功 .

4. 利用二重积分计算定积分

重积分的计算化为定积分来计算，这是众所周知的事实，但反之，定积分的计算往往又可化为重积分的计算，这也是一种常用方法 . 表面上看，化定积分为二重积分是将问题复杂化了，但是对于某些特殊结构的被积函数而言，却可以使定积分问题大大简化 . 当积分不易积出时，可考虑将积分还原成二重积分，再交换二次积分的次序将其积出 .

例 7. 计算定积分 $\int_0^1\frac{x^7-x^3}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解：因为 $\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$ $\qquad(a>0,b>0)$

所以 $\frac{-x^3}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_3^7 x^y\mathrm{d}y=\int_3^7\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_3^7\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y$.

5. 利用幂级数计算定积分

例 8. 计算定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$.

解：因为 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$（ $-1<x<1$ ）

由幂级数在收敛半径内可以逐项可积的性质得：

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n})\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

小结：利用利用幂级数计算定积分是高等数学中常采用的方法，对于原函数不能用初等函数表达的定积分，这一途径尤为有效 .

6 . 总结

通过以上五种解定积分的方法和例题分析，综合起来，求解一个定积分问题的大致步骤为：（1）熟悉问题；（2）深入理解问题；（3）探索有益念头，拟定解题计划；（4）实现解题计划；（5）对解答的回顾和总结 . 这正是著名的数学家波利亚在如何解题中表现出来的几个要点 . 解题教学与训练是高等数学教学的一个重要组成部分，通过以上定积分解题探求过程可以看出，解题并非是一种纯粹的智能活动，在解题过程中，决心、情绪也将起着极为重要的作用 . 当我们的推测，即将成为事实，解答方案就在眼前时，决心是容易维持的，然而，当以某种信念所遵循的道路突然受阻，使人陷入困境无计可施时，决定就容易随之动摇。以上 5 种方法是定积分计算常用的简化技巧，如果在平常的学习中能够善于总结，举一反三，那么定积分的计算问题将迎刃而解 . 综上所述，计算定积分的方法是很多的，且定积分计算题的数量是无限的，而题型是有限的，我们只有掌握好各类题型的解题技巧，才能融会贯通，迅速找到解题的突破口。

参考文献

[1] 宁容键。一类定积分的算法。工科数学，1992 年第 4 期。
[2] 钱林、杨巧林。妙用公式求积分。高等数学研究，2004 年第 6 期。
[3] 同济大学数学教研室 . 高等数学：上册 [M]. 第六版 北京：高等教育出版社 , 2007：132–133.