

“微积分”课程教学案例分析

阿孜古丽·伊克木¹ 买买提热依木·玉努斯¹ 黄清梅² 努尔艾力·亚森¹

(1.新疆财经大学统计与数据科学学院公共数学教学部 新疆乌鲁木齐市 830012; 2.新疆财经大学统计与数据科学学院金融数学系 新疆乌鲁木齐市 830012)

摘要: 本案例在微积分教学中重点, 难点知识点的基础上, 从不同的角度对不同的案例进行了分析. 利用买水果的费用问题讲解了分段函数; 对学生容易混淆的分段函数的极限与连续性和难理解的导数进行了分析; 利用函数最大值和最小值对经济学中“利润最大化”“成本最小化”问题进行了全面的思考和总结, 指出了学习微积分在学习其他经济学中的重要性; 随后, 对不定积分分部积分法进行深刻地分析并对重点案例中融入思政元素内容. 最终做到立德树人, 培养社会主义有用人才的教学目的.

关键词: 分段函数, 可导性, 利润最大值, 积分

"Calculus" course teaching case analysis

Azuguli Ikmu¹ Maimaiti Reyimu Yunusi¹ Huang Qingmei² Nur Aili Yassen¹

(1 Public Mathematics Teaching Department, School of Statistics and Data Science, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi, Xinjiang, 830012; 2 Department of Finance and Mathematics, School of Statistics and Data Science, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi, Xinjiang, 830012)

Abstract: On the basis of the key points in calculus teaching, this case, different cases are analyzed from different angles. It explains the cost of buying fruit, analyzes the limit and continuity and difficulty, and summarizes the problems of "profit maximization" and "cost minimization" in economics, points out the importance of learning calculus in other economics; then analyzes the integral method of variable integral and integrates ideological and political elements into key cases. Finally, the teaching purpose of cultivating morality and cultivating socialist useful talents.

Key words: segment function, conducability, profit maximum, integral

引言

2021年9月8日习近平总书记给全国高校黄大年式教师团队代表的回信中希望全国教师学习黄大年等优秀教师的高尚精神, 开拓创新, 真正把为学, 为事, 为人统一起来, 当好学生成长的引路人, 为培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人, 全面建设社会主义现代化国家不断做出新的贡献.

大学是大学生培养人生目标的阶段. 在大学第一年学习和训练《微积分》, 可以使使学生树立明确的数量关系, 可以提高学生的逻辑思维能力; 用数学知识处理现实世界中种种复杂问题的意识和能力; 可以使学生增强拼搏精神和应变能力; 可以调动学生的探索精神和创新能力; 可以使学生具有数学上的直觉和想象能力. 还能帮助学生科学家的奋斗精神, 树立为科学献身的信念, 为实现中华民族伟大复兴的中国梦而奋斗.

案例1 利用买水果的费用问题讲解分段函数.

案例目的: 通过生活中的问题理解分段函数概念.

例1.1 (费用问题) 某水果店对购买店里任何一种水果制定了如下的销售策略: 购买不超过2公斤, 每公斤5元; 购买不超过5公斤, 其中超过2公斤的部分每公斤4.5元; 购买超过10公斤, 期中超过5公斤的部分每公斤3.5元.

求购买量 x 公斤时的费用函数 $C(x)$.

提出问题: (1) 求购买量 x 公斤时的费用函数 $C(x)$.

(2) 按销售策略购买15公斤水果, 可以省多少?

问题解答 (1):

当购买量 x 公斤时, 两公斤以内5元, 容易得到费用为 $5x$;

当购买量超过五公斤时, 超出部分4.5元, 对应的费用函数为 $10+(x-5) \times 4.5$

当购买量超过十公斤时, 超出部分3.5元, 则对应的费用函数为 $10+8 \times 4.5+(x-10) \times 3.5$

那总费用函数如下:

$$C(x) = \begin{cases} 5x, & 0 < x \leq 2 \\ 10 + (x-2) \times 4.5, & 2 < x \leq 5 \\ 10 + 8 \times 4.5 + (x-10) \times 3.5, & x > 10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x, & 0 < x \leq 2 \\ 1 + 4.5x, & 2 < x \leq 5 \\ 11 + 3.5x, & x > 10 \end{cases}$$

问题解答 (2):

当购买量15公斤时, 对应的费用函数为 $11+3.5x=63.5$

通过店里规定的销售策略可以省 $75-63.5=11.5$ 元

案例总结: 为了深刻分析分段函数把学生分组, 每个组提交一个分段函数的问题和解答思路, 最后学生明白分段函数不是一个以上简单函数的组合, 它的每一部分对应一个表达式, 所以分段函数是一个函数, 表达一个完整内容的函数.

思政元素挖掘

习近平总书记对青年学生提出要求强调立鸿鹄志, 求真学, 不负韶华. 这就说明人生的不同阶段都有一定的分段目标, 分段目标最终为报效祖国这一根本目标服务的. 分段函数实际上也是规划人生的主要工具. 对于进入大学校园的学生而言, 四年的生活每一年作为一个阶段可以很好的规划四年时间.

案例2 分段函数的极限, 连续性和可导性分析

例2.1 (极限问题)

讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处是否有极限.

案例目的: 理解分段函数的左右极限, 会判断是否有极限.

问题解答: 函数是否极限存在, 先判断是否存在左右极限, 再看看左右极限是否相等.

$$\because \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x-1 = 1, \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

所以这个函数在该点处的极限存在。

案例总结: 如果给定函数的左右极限存在但不相等或者左右极限中任何一个极限不存在, 那么这个函数的极限就不存在。

思政元素挖掘

教师在讲授极限知识的过程中, 让学生观看“割圆术”以及“截丈”动画, 学生们可以感受到我国古代思想的精华, 引起求知欲望, 提高学习兴趣, 同时激发学生的爱国热情。并且解决了什么是极限这个问题, 加深了对思政教育的理解。也可以让学生了解中国的古代数学有着辉煌的成就, 从而产生强烈的爱国主义情操。

例 2.2 (连续性问题的)

案例目的: 判断分段函数的连续性为后期可导性做准备。

讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2x+1, & 1 \leq x < 2 \\ 1+x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ 在点 $x=2$ 处的连续性。

问题解答: $\because \lim_{x \rightarrow 2^-} 1+x^2 = 5, \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x+1 = 5$ 而且 $f(2) = 1+2^2 = 5$
函数在 $x=2$ 处的极限存在并且等于函数值,
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 5$
所以我们容易判断函数在 $x=2$ 处连续。

案例总结: 判断分段函数的连续性主要看左右极限是否存在并相等, 函数值是否存在, 函数值和极限值是否相等三个问题, 不满足任何一个条件都不连续。

思政元素挖掘:

习近平总书记总是强调伟大斗争需要接续的力量, 一代接着一代干。这其实是实现最终目标过程中选择的社会主义道路的连续性, 制度的连续性问题。

例 2.3 (可导性问题)

案例目的: 掌握左右导数概念, 会判断分段函数在某一个点的可导性。

讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ xe^x+1, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的可导性。

问题解答: 先讨论函数在点 $x=0$ 处的连续性, 再讨论可导性。
 $\because \lim_{x \rightarrow 0^-} x+1 = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x+1 = 1$, 而且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$
所以可以判断函数在连续。那函数是否在该点可导呢?

$$\because f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x+1-1}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1, \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1-1}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1, \quad f'_+(0) = f'_-(0) = 1$$

可以看到这个函数不但在 $x=0$ 处连续, 而且还可导。

案例总结: 如果函数的左右导数对应的两个极限都存在并且相等才能可导。因此函数连续才有可导的可能性

这三个道题充分说明函数可导那它肯定连续而且一定存在极限, 反之不一定成立

案例 3 利用显函数求导法求解隐函数的导数

$F(x, y) = 0$ 的导数书上解释逐项求到后再表达式中求出 $\frac{dy}{dx}$ 。但实际操作没有那么简单。下面对隐函数求导进行分析:

3.1 (隐函数的求导问题) 求隐函数 $x^2 - \cos y + xy = e$ 的导数

案例目的: 在显函数 $y = f(x)$ 的求导基础上, 达到隐函数求导方法。

案例分析: 先对隐函数 $x^2 - \cos y + xy = e$ 的每一项对 x 求导, 然后把有导数项和没有导数项移方程两侧, 最后把 y' 表示出来。

问题解答:

$$\begin{aligned} x^2 - \cos y + xy &= e \\ 2x + \sin y \cdot y' + y + xy' &= 0 \\ \sin y \cdot y' + xy' &= -y - 2x \\ (\sin y + x)y' &= -(y + 2x) \\ y' &= -\frac{y + 2x}{\sin y + x} \end{aligned}$$

问题总结: 本题中 x^2 的导数做出来容易, 但 $\cos y$ 的导数为什么等于 $\sin y \cdot y'$ 是重要, 因为 $\cos y$ 看成复合函数。 xy 的求导过程中为什么 x 的导数等于 1, 但 y' 的导数不等于 1 是很关键的问题。如果这两项导数有问题, 整个导数就错了。所以隐函数的求导过程中一定要注意包含 y 的项的求导法, 还需要把所有 x 的求导公式改成 y 的求导公式来背。

思政元素挖掘

隐函数的求导法让学生知道分析表面和本质的辩证唯物主义思想, 帮助学生通过现象看透本质。激发学生数学思维意识是数学教学中的至关重要的问题, 而数学知识正是思维意识活动基础上的衍生物, 学生数学思维能力的强弱将对学生学习探索数学知识的深度直接有关系。看透问题的本质才能发挥好自己的能力。

案例 4 利用函数最大值和最小值实现“利润最大化”与“成本最小化”

经济学中经常遇到某种经济函数的最大值或者是最小值问题。经济学的目的是充分利用有限资源, 在成本最低化的基础上达到利润最大的目的。那么微积分的角度我们怎样才能达到这个目标呢?

例 4.1 (利润最大化)

案例目的: 理解利润函数, 利用导数思路求利润最大化问题。

某一家公司生产 x 个单位产品的总成本 $C(x) = 12 + 10x$, 总收益 $R(x) = 6x - 0.01x^2$ 。

提出问题: 产量为多少时, 可以获得最大利润?

问题解答: 因为利润函数 $L(x) = C(x) - R(x)$, 我们容易得到 $L(x) = 12 + 10x - 6x - 0.01x^2 = -0.01x^2 + 4x + 12$

令 $L'(x) = 0$, 可以得到 $L'(x) = -0.02x + 4 = 0, x = 200$

继续求利润函数的二阶导数可以得到 $L''(x) = -0.02 < 0$, 因此利润函数产量 200 时取得最大值, 也就是利润最大。即 $L(200) = (-0.01x^2 + 4x + 12) /_{x=200} = 412$

求利润最大的题是极大值存在的二阶充分条件来判断的, 那么利用极小值值存在的二阶充分条件可不可以解决成本最小的问题呢?

例 4.2 (成本最小化)

案例目的: 理解成本函数, 利用导数来判断成本最小问题。

某公司生产某种产品日产量最大为 20 台, 每天的生产总成本 C (单位: 万元) 是日产量 x (单位: 台) 的函数: $C = C(x) = 20 + 2x + 0.2x^2 \quad x \in [0, 400]$

提出问题: 问日产量为多少台时, 公司可以获得最小成本?

问题解答: 按照极小值存在的二阶充分条件, 先求成本函数的一阶导数和驻点。然后继续求二阶导数, 判断成本函数的二阶导数在驻点处是否大于零。

$$\begin{aligned} C' &= C'(x) = (20 + 2x + 0.2x^2)' = 2 + 0.4x \\ \text{令 } C'(x) &= 2 + 0.4x = 0, \text{ 可以得到 } x = 5 (\text{台}). \\ \text{因为 } C''(x) &= 0.4 > 0, \text{ 所以成本函数取得极小值.} \\ C(10) &= (20 + 2x + 0.2x^2) /_{x=5} = 35 (\text{万元}) \end{aligned}$$

案例总结

以上讨论的两个例题反映完全相反的两个问题的解决方法, 虽然最后要达到的目的是完全相反, 但主要思路根据函数最大值和最小的判定来实现的。这个步骤可以概括为以下几点:

(1) 先确定函数的一阶导数和驻点, 而且还要判断它的驻点是否一个。

(2) 继续求函数的二阶导数是否存在, 而且在驻点上的值大于零还是小于零。

(3) 如果函数的二阶导数在驻点处大于零, 原函数取得极小值; 如果二阶导数在驻点处小于零, 原函数取得极大值。

(4) 如果它的驻点只有一个, 那么函数的极大值就是最大值, 极小值就是最小值。

思政元素挖掘

成本最小化和利润最大化的解决, 实际上利用了求一阶导数等于零来求出极值来判断的。其实我们每天都在面临最小化和最大化的问题。比如疫情防控期间, 我国采用的策略是疫情损失最小化, 经济发展最大程度上不受影响等。这些问题都涉及到最大化和最小化的问题。在社会主义经济建设中, 我们天天打交道的是成本最小化, 消费最小化, 人民利益最大化等等。这些问题的解决中上述方程的确有较好的运用价值。

案例 5 不定积分分部积分法

积分运算是导数运算的逆运算, 因此开始学习积分运算大部分同学的情绪会很低落的。但是在老师的引导下慢慢会好起来, 强起来。分部积分法就是积分运算中学生容易出差错的内容。下面通过两个例子对分部积分法进行详细分析, 达到解决不定积分运算中的难点问题。

例 5.1 (不定积分分部积分法 1) $\int x \ln x dx$

案例目的: 掌握不定积分分部积分公式, 会求不定积分

问题分析: 这种积分看起来很简单, 但求这种积分只能按照分部积分公式来解决, 所以先观察被积函数, 确定那个函数适合做微分。通过观察可以看到两个被积函数中 $x dx = d \frac{x^2}{2}$ 适合做微分, 然后按分部积分公式 $\int u dv = \int u dv = uv - \int v du$ 来计算即可。

问题解答:

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d \ln x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C\end{aligned}$$

案例总结:

求解这种不定积分学生遇到的问题首先做微分, 然后按分部积分公式处理时两个函数位置交换后就积分, 函数位置交换后还需要计算积分, 要看是否可以求这个积分。如果一次积分后这个积分还需要做第二次积分, 那我们再做一次, 直到这个积分会直接求到为止。那通过下面这道题我们进一步对分部积分法做深刻的分析。

例 5.2 (不定积分分部积分法 2) $\int e^x \cos x dx$

案例目的: 掌握重复使用不定积分的分部积分公式, 并求不定积分。

问题分析: 这个积分中两个函数都符合做微分, 但 $e^x dx = de^x$ 比 $\cos x dx = d \cos x$

更容易一些。然后还是按照分部积分公式来计算。

问题解答:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \int \cos x de^x = e^x \cos x - \int e^x d \cos x \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int \sin x de^x \\ &= e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x d \sin x) \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ 2 \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \therefore \text{原积分 } \int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x)\end{aligned}$$

案例总结: 虽然这个题开始时好操作, 但做了两次积分还会出现原积分。这时全班学生都不知道怎么办? 有的同学说这个题有无。有的说没有答案。但他们没有注意这样一个点: $\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$, 积分右侧出现的是原积分相反符号的积分, 所以只要把它移到左侧, 左边变成原积分的两倍 $2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$, 这样问题就解决了。

思政元素挖掘

积分的求解虽然复杂, 但是应用范围较广。比如说最优化问题和动态控制问题中如果不懂得积分的求解, 无法很好的理解常微分方程, 经济系统运行中最优的状态是什么样的等这些问题也无法得到求解。习近平总书记强调的系统防范金融风险, 强化实体经济的扶持力度, 保持经济平稳运行等问题都是经济运行最优化和动态控制的问题。所以积分的学习实际上为解决上述问题打下最基本的理论基础。

结束语

微积分是大学一年级学生第一学期要学的公共课程之一。本课程要求学生有基本的高中数学基础。它是以函数为研究对象讨论极限, 连续, 导数(微分), 积分等内容。难度高, 需要学生付出很大的努力。

本案例通过微积分课程中的部分知识点总结了学习微积分的重要性, 说明了微积分在经济学领域的应用。案例把思政教育融入课程, 增强课堂的趣味性并起到“全员, 全方位”育人的目的。不但实现立德树人, 还可以提高学生学习微积分的兴趣, 加深学生对微积分课程知识点的理解, 提升学生的思维能力, 并对将来的微积分课程改革与实践, 案例的加以推广有重要的意义。本案例中的典型例题是微积分教学过程中对年轻老师今后的教学提供帮助。

参考文献

- [1] 王志勇, 王春秀. 对微积分学教育教学中构建学生数学极限思想的研究. 数学学刊 [J] 2020 (20)
- [2] 同济大学数学系, 高等数学(上, 下)册. 高等教育出版社, 2020.6
- [3] 赵树媛. 微积分, 第五版. 人民大学出版社, 2021.3
- [4] 彭丽娟. 数列极限教学案例设计与实践, 当代教育实践与教学研究. 2022.04
- [5] 张慧. 数学课程思政案例设计及应用, 高等教育研究. 2021.7
- [6] 黄新宇, 王修建. 思政元素融入高等数学的教学研究—以数列极限为例, 浙江万里学院学报[J], 2020.7

作者简介:

- [1] 阿孜古丽·伊克木, 性别: 女 (1975.11.27.), 民族: 维吾尔, 籍贯: 新疆乌鲁木齐市, 硕士, 新疆财经大学统计与数据科学学院, 讲师、研究方向: 应用数学
- [2] 买买提热依木·玉努斯, 性别: 男 (1974.10.15.), 民族: 维吾尔, 籍贯: 新疆乌鲁木齐市, 硕士, 新疆财经大学统计与数据科学学院, 讲师、研究方向: 应用数学
- [3] 黄清梅, 性别: 女 (1992.12.03), 民族: 汉, 籍贯: 贵州毕节市, 硕士, 新疆财经大学统计与数据科学学院, 讲师, 研究方向: 图像处理。
- [4] 努尔艾力·亚森, 性别: 男 (1985.3.11.), 民族: 维吾尔, 籍贯: 新疆温宿县, 博士, 新疆财经大学统计与数据科学学院, 讲师、研究方向: 理论物理