

微积分中函数极值问题的实际应用举例

韩霖

成都锦城学院 四川成都 611730

摘要:在当今社会生活中,工业工程、经济管理、自然科学、建筑设计、农业发展等许多领域中的问题都会涉及到极值方面的应用。通过把理论和实际相结合,提供解决问题的方法,为实际生活提供便利。

关键词:微积分;极值;条件极值;实际应用

函数的极大值和极小值统称为极值。一元函数、二元函数以及多元函数极值问题始终是微积分研究探索的重点问题,有关函数极值实际问题的例子也非常广泛。

一、一元函数极值的判定及实际问题举例

1.存在极值的充分条件:若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续,且在 $U(x_0, \delta)$ 内也可导,又 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在。

(1) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$, 那么 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值;

(2) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$, 那么 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值;

(3) 如果当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 不变号, 那么 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

除此之外,也可通过二阶导来判定。

2.实际问题举例

极值在环境生活中的应用:

例1:工厂在作业过程中其下水道会向周边地区排放废水污染水资源。假设在周边某处的废水毒性与此处到工厂的距离平方成反比,而与下水道流出的废水量成正比。现有 A, B 两工厂相距 20km, 其中 B 工厂排出的废水量是 A 工厂的 8 倍。请求出两个工厂连线上的点 C , 使该点的废水毒性最低。

解:若 A 工厂排出的废水量是 k , B 工厂排出的废水量为 $8k$,

设 AC 为 x (其中 $0 < x < 20$), 所以 $BC = 20 - x$,

依题意得点 C 处的废水浓度 $f(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{8k}{(20-x)^2}$ (其中 k 是比例系数,且 $k > 0$),

$$f'(x) = -2kx^{-3} + 16k(20-x)^{-3} = \frac{16kx^3 - 2k(20-x)^3}{x^3(20-x)^3},$$

作者简介:韩霖(1988-),女,河南商丘人,讲师,硕士,研究方向:应用数学。

$$\text{令 } f'(x) = 0 \quad \text{得 } x = \frac{20}{3} \in (0, 20)。$$

因为当 $x \in (0, \frac{20}{3})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{20}{3}, 20)$ 时, $f'(x) > 0$,

故当 $x = \frac{20}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值,

因此当 C 位于距点 A 为 $\frac{20}{3} \text{ km}$ 时, 使该点的废水毒性最低。

例2:某新能源电车匀速行驶时每小时耗电量 y ($\text{kW} \cdot \text{h}$) 与其行驶速度 (km/h) 之间的关系式为:

$y = \frac{1}{128000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8, (0 < x \leq 120)$ 。若 A, B 两地之间距离是 100km。问电车以多大的速度匀速行驶, 从 A 到达 B 耗电量最少? 最少耗电量多少?

解:从 A 到 B 耗电量的函数解析式为:

$$f(x) = \frac{100}{x}y = \frac{100}{x}(\frac{1}{128000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8) = \frac{x^2}{1280} + \frac{800}{x} - \frac{15}{4},$$

$$f'(x) = \frac{x}{640} - \frac{800}{x^2} = \frac{x^3 - 512000}{640x^2} = \frac{(x-80)(x^2 + 80x + 6400)}{640x^2},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \quad \text{得 } x = 80 \in (0, 120]。$$

因为当 $x \in (0, 80)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (80, 120]$ 时, $f'(x) > 0$,

故当 $x = 80$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(80) = 11.25(\text{kW} \cdot \text{h})$,

所以当电车速度为 80 km/h 匀速行驶时, 从 A 到达 B 耗电量最少, 最少耗电量为 $11.25 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 。

二、二元函数的极值的判定及实际问题举例

1.存在极值的充分条件:若函数 $z = f(x, y)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内连续, 且有连续的一阶、二阶偏导数, 其中 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 假设 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$, 那么 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处:

(1) $AC - B^2 > 0$ 时有极值, 且 $A < 0$ 为极大值, $A > 0$ 为极小值;

(2) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;

(3) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 需另作讨论。

2. 实际问题举例

极值问题在动物行为研究中的应用:

例3: 猫头鹰为了捕获老鼠, 在空中飞行时的水平推动力为 x , 垂直引力 y , 它在飞行时消耗能量的函数关系式为 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 。所以当水平推动力和垂直引力为多少时, 猫头鹰捕到老鼠所消耗的能量最少?

解: 由
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$
 得驻点为 $(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$ 。

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, f''_{xy}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = -6y + 6,$$

在点 $(1, 0)$ 处, $A = 12, B = 0, C = 6$, $AC - B^2 = 72 > 0$ 且 $A > 0$,

所以在 $(1, 0)$ 处有极小值 $f(1, 0) = -5$ 。

在点 $(1, 2)$ 处, $A = 12, B = 0, C = -6$, $AC - B^2 = -72 < 0$, 所以在 $(1, 2)$ 处没有极值。

在点 $(-3, 0)$ 处, $A = -12, B = 0, C = 6$, $AC - B^2 = -72 < 0$, 所以在 $(-3, 0)$ 处没有极值。

在点 $(-3, 2)$ 处, $A = -12, B = 0, C = -6$, $AC - B^2 = 72 > 0$ 且 $A < 0$,

所以在 $(-3, 2)$ 处有极大值 $f(-3, 2) = 31$ 。

所以, 当水平推动力为 1, 垂直引力为 0 时, 猫头鹰捕到老鼠所消耗的能量最少。

三、条件极值问题

假如一个函数只有定义域的限制, 那么这种极值问题是无条件极值问题。然而, 在现实生活的实际问题中, 自变量往往带有其他约束条件, 像这样的极值问题我们称条件极值问题。

1. 拉格朗日乘数法

对于条件极值问题较常用的方法是拉格朗日乘数法:

(1) 作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 目标函数是 $f(x, y)$, 约束条件为 $\phi(x, y) = 0$, 其中 λ 是拉格朗日乘数。

(2) 由方程组
$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda\phi'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda\phi'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$
 解

得函数 $L(x, y, \lambda)$ 的驻点 (x_0, y_0, λ_0) , 则 (x_0, y_0) 就是函数 $f(x, y)$ 在约束条件 $\phi(x, y) = 0$ 下的驻点。

(3) 判定 (x_0, y_0) 是不是极值点。

因此, 求解条件极值问题即为求一个关于拉格朗日函数的无条件极值问题, 并且拉格朗日乘数也可增加至

自变量大于两个或约束条件不止一个的情况。

2. 实际问题举例

商品生产或销售过程中, 价格的上涨会增加商家的收入, 但也可能导致购买者购买力度的下降, 使得产品的生产数量减少。在生产过程中, 单个商品的成本会因为产量的提高而大大减少, 所以生产成本与对外销售价格会互相制约。同时在实际问题中, 商品的生产和销售往往会受到一些条件限制, 商家需设计出合理的商品售卖价格使得成本最低且得到最大收益的方案。

例4: 某小区车位总价格 R (万元) 与两种绑定赠送服务费用 x, y (万元) 之间的函数关系式为 $R(x, y) = \frac{200x}{x+5} + \frac{100y}{10+y}$ 。其中售价的五分之一为开发商的利润, 但要从中扣除服务费用。若服务费用总预算为 25 万元, 请问如何分配这两种服务费用使得开发商获利最大化?

解: 设利润为 Z , 有

$$Z = \frac{1}{5}R - x - y = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y} - x - y,$$

限制条件为 $x + y = 25$, 则拉格朗日函数为:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y} - x - y + \lambda(x + y - 25),$$

$$\text{由 } \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = \frac{200}{(x+5)^2} - 1 + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = \frac{200}{(10+y)^2} - 1 + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 25 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$$

因此两种服务费用为 15 万元及 10 万元的时候, 开发商获利最多。

四、结语

极值的应用非常广泛, 它涉及到生活中的方方面面, 生活中的许多问题都可以采用求极值的方法来解决。在求解函数的最值时, 也是对函数极值的一个应用, 这也是高等数学的一个难点。在求解过程中, 首先要根据题目要求分清所给问题是一个极值问题还是一个条件极值问题, 再根据不同的求解方法得到所要求的最值, 从而解决实际问题。

参考文献:

- [1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 席席. 论极值在生活中的应用[J]. 农家参谋, 2019(15): 240.
- [3] 韩建新. 求实际问题中多元函数最值的几点心得[J]. 高等数学研究, 2020, 23(02): 47-51.
- [4] 荆庆林. 基于求多元函数极值应注意问题的研究[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2013, 29(04): 67-70.