Universe Scientific Publishing
Educational and teaching research, 教育教学研究(2)2021,3
ISSN:2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

高职学生微积分基本思想理解方法研究

——以多重积分概念的教学设计为例

刘　梅
成都工业职业技术学院　四川成都　610213

摘　要：微积分是高职学生高等数学教育教学中最为重要的概念之一，高职学生对微积分基本思想理解程度也基本确定了其对高等数学这门学科的学习深度，对多重积分概念的理解程度又基本确定了其对微积分基本思想理解的深度，故只要高职学生理解了多重积分概念，并学会用其理解工作和生活中的一些问题，则达到开设高等数学这门课程的目的。

关键词：微积分；概念；多重积分；高职学生

引言：

高等数学是高职学生最重要的基础课程之一，它对学生的最主要的作用是学会用高数思维理解甚至解决实际生活或工作中遇到的问题。但在实际教学过程中，因高职学生的生源复杂，数学基础参差不齐等原因，大部分学生并不能认识到高等数据的重要性，认为学习高等数学就是了应付考试、取得学分，造成了大部分学生不但不能对微积分的基本概念进行比较深入的理解，同时对高等数学概念之间的关系也很模糊，而加强对高职数学课程中的概念教学则显得尤为重要。

微积分作为高职数学教学的核心内容，其重要性不言而喻。高职学生对微积分基本思想理解程度也基本确定了其对高等数学这门学科的学习深度，对多重积分概念的理解程度又基本确定了其对微积分基本思想理解的深度，故本文从教学方法设计的角度，探讨（多重）积分的理解方法，以加深对高职学习微积分概念的理解。

一、理解（一重）微积分的概念

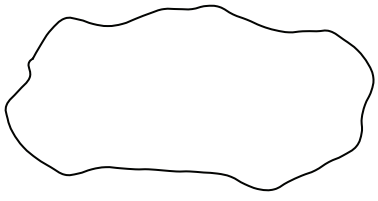

图1　不规则形状

对于规则形状的面积计算，比如矩形、圆形、三角形，我们都有现成的面积公式可用。可如果需要计算如图1所示的无规则形状面积，则无法通过某一固定的面积公式进行计算。其解决思想就是把不规则形状分解成无数个规则形状去近似替代，分别计算其面积后求和即可得到任何不规则形状的近似面积。

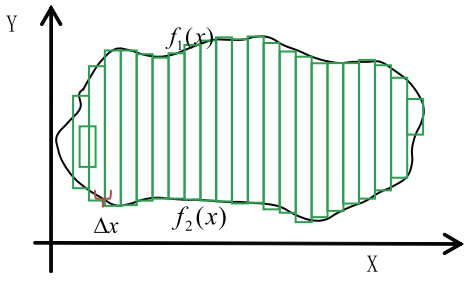

图2　用矩形进行近似替代

如图2所示，不规则区域由f_1（x）和f_2（x）两个函数所围成，现将该区域分割成多个宽度为△x（概念上，△x是x的增量），长度为f_1（x_i）–f_2（x_i）的矩形（i表示矩形的序号），则总面积等于所有绿色矩形的面积之和，区域面积S可表示为：

$$S=\sum S_i\ ,\quad S_i=f(x_i)\bullet\Delta x\ ,\quad f(x_i)=f_1(x_i)-f_2(x_i) \tag{2-1}$$

但近似值S并不那么精确，为使近似值更加精确，可以通过增加矩形的数量使近似值更准确，如下图3所示。

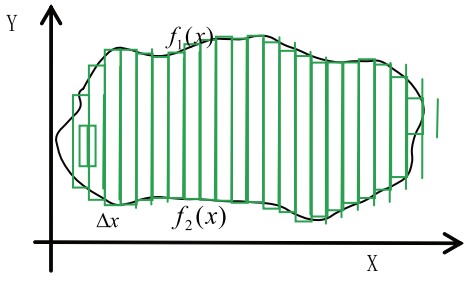

图3　增加矩形的数量提高近似精度

随着△x的变小，矩形数量越来越多，近似面积S也变得更加精确，最终随着矩形的数量接近无穷大，此时

作者简介：刘梅，女，汉族，1986-06，四川遂宁人，成都工业职业技术学院，助教，本科学历，学士学位，研究方向：主要从事数学教学研究。

矩形的宽度 $\Delta x \to 0$（将其写成dx，称为x的微分），近似面积越来越接近实际面积。无穷个矩形面积的总和被称为积分：

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i = \int f(x)dx \qquad (2\text{-}2)$$

此即为使用（一重）积分的方法，即对1个变量进行积分（本例中为x），当沿着x轴移动时，取无限多个小的长方形的总和，宽度越小，近似值就越精确。所以微积分就是把复杂的问题切分成多个简单的部分，即切分和重组，切分的过程叫微分，重组在一起叫积分。

二、理解二重积分的概念

对于规则形状的体积计算，比如球形、圆锥、圆柱，都有现成的体积公式可用。可如果需要计算不规则形状体积，则只能通过二重积分的方式来实现。二重积分在概念上比一重积分多出了一个维度，其区别是：一重积分是对长度进行积分，积分结果等于平面坐标系中的面积；而二重积分是对面积进行积分，积分结果等于三维坐标系中的体积。

所以，若要计算任意形状的三维体积（如图4），可从微积分（一重积分）的思想出发，有如下两种思路：

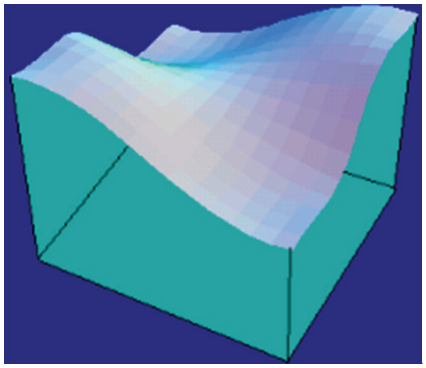

图4　任意形状三维物体

（1）把三维物体分割成多块厚度为 Δy 的切片（如图5），则只需要计算每一片的面积 S_i 并求合，即可得到近似体积数据。其过程如下：

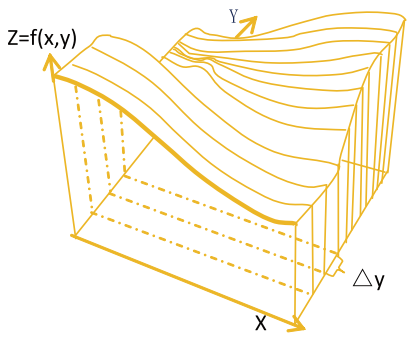

图5　切片分割

①用上文一重积分的方法，求取各切片的面积 S_i：

$$S_i = \int f(x, y_i)dx \qquad (3\text{-}1)$$

②用求得的切片面积乘以厚度 Δy 得到各切片的体积 V_i：

$$V_i = S_i \bullet \Delta y = (\int f(x, y_i)dx) \bullet \Delta y \qquad (3\text{-}2)$$

③把各切片体积加起来即可得到近似体积V：

$$V = \sum V_i = \sum (\int f(x, y_i)dx) \bullet \Delta y \qquad (3\text{-}3)$$

④随着 Δy 的变小，切片数量越来越多，近似体积V也变得更加精确，最终随着切片的数量接近无穷大，此时矩形的宽度 $\Delta y \to 0$（将其写成dy，称为y的微分），近似体积越来越接近实际体积。无穷个切片体积的总和即为三维物体的体积，记为二重积分V：

$$V = \iint f(x, y)dxdy \qquad (3\text{-}4)$$

（2）把三维物体分割成多块底面积为 ΔS 的曲顶柱体（如图6及图7），则只需要计算每一个柱体体积 V_i 并求合，即可得到近似体积数据。其过程如下：

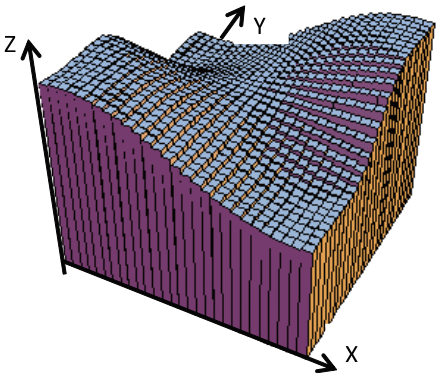

图6　用曲顶柱体进行近似分割

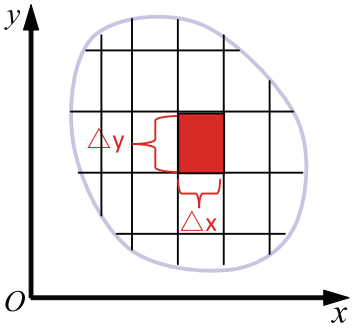

图7　各柱体底面积为 $\Delta x \cdot \Delta y$

①各柱体底面积：

$$\Delta S = \Delta x \bullet \Delta y \qquad (3\text{-}5)$$

②求得各柱体体积：

$$V_i = f(x_i, y_i) \bullet \Delta S = f(x_i, y_i) \bullet \Delta x \bullet \Delta y \qquad (3\text{-}6)$$

③把各柱体体积加起来即可得到近似体积：

$$V = \sum V_i = \sum f(x_i, y_i) \bullet \Delta x \bullet \Delta y \qquad (3\text{-}7)$$

④随着底面积为ΔS变小，柱体数量也越来越多，近似体积V也变得更加精确，最终随着柱体的数量接近无穷大，此时柱体地面边长Δx→0，Δy→0（将其写成dx及dy），近似体积越来越接近实际体积。无穷个切片体积的总和即为三维物体的体积，记为二重积分V：

$$V=\iint f(x,y)dxdy \qquad (3-8)$$

用以上两种思路求得的结果相同，说明微积分思想分析问题可以从各个方向进行，只需要符合“无限分割、无穷累加”、“以直代曲，以不变代变”的思想即可。通过以上步骤，高职学生可以比较轻松的理解二重积分的思想概念，并为理解三重积分概念打下基础。

三、三重积分的概念初探

上文对一重积分和二重积分的概念的讲解都是以求解平面面积和空间体积为例进行的。但微积分的作用不仅仅是求解不规则的二维和三维图形的面积和体积，本节通过探索三重积分概念的理解步骤，说明微积分用途是可无限扩展的。

通过前面两节对一重积分和二重积分的理解，可以发现一些规律：

1）一重积分，是在一个维度上进行积分，得到到一个二维图形的面积。

2）二重积分，是在两个维度上进行积分，得到一个三维形状的体积。

3）那三重积分，就应该是在三个维度上进行积分，得到一个四维形状的某个量。

下面通过具体例子来说明三重积分的概念：假设某一三维空间中充满了某种气体，空间各处气体的密度是空间坐标的函数rho=rho（x，y，z），如何求得此空间的气体总重量？

用一重积分及二重积分求解思路，其求解过程如下：

①取得空间体积的微分 $dV=dxdydz$；

②求得空间气体重量的微分

$dM=rho(x,y,z)dV=rho(x,y,z)dxdydz$；

③在整个空间上进行积分得到整个空间的气体重量

$M=\iiint rho(x,y,z)dxdydz$。

因为前文有一重积分和二重积分的详细分解步骤，本例简化了分析过程。通过前例可知，无论是几重积分，其思想都来源于最基础的分割（微分）和累加（积分），并不需要多高的数学水平即可轻松理解。

四、总结

通过以上一重积分、二重积分即三重积分的分析实例，高职学生可以更为轻松理解“无限分割、无穷累加”、“以直代曲，以不变代变”的微积分思想。理解了这种数学思维，即便学生在上学期间学到的数学知识已经遗忘，但不管他们从事何种工作，上学时学习掌握领悟感受到的数学精神、数学思想、数学方法、思考问题的着眼点等，都时刻发挥着作用，使他们终生受益。

参考文献：

[1]张福珍.高职学生数学思维能力的培养[J].船舶职业教育.2019，7（1）：15-17.

[2]同济大学.高等数学（下册）[M].北京.高等教育出版社.2014.135-184.