基于类比迁移法的积分学教学探究

朱四如　陈兰花　胡军涛
空军预警学院基础部　湖北　武汉　430019

摘　要：针对现行高等数学中积分学知识模块涉及概念多、公式多、技巧多和应用混淆等问题，基于思想方法、背景内涵、公式联系和计算技巧四个方面，采用统一理论，借助类比迁移法，在对比和类比基础上，构建各型积分之间的联系，以利于积分学知识内容的统一，从而加强对积分学内涵的理解。该方法遵循教育和学习规律，对学生思维能力的提升和积分学知识的掌握，具有一定的借鉴意义。
关键词：积分学；类比迁移法；公式；场论

Exploration of Integral Teaching Based on Analogy Transfer Method

Siru Zhu，Lanhua Chen，Juntao Hu
Basic Department of Air Force Early Warning Academy Wuhan, Hubei 430019

Abstract: Aiming at the problems that the knowledge module of integral calculus involves many concepts, formulas, skills and confusion in application, based on four aspects: ideological method, background connotation, formula connection and calculation skills, the unified theory and analogy transfer method are adopted to construct the connection among various types of integral on the basis of comparison and analogy, so as to help unify the knowledge content of integral calculus and strengthen the understanding of its connotation. This method follows the law of education and learning, and has certain reference significance for improving students' thinking ability and mastering integral knowledge.
Keywords: Integral calculus; Analogy migration method; Formula; Field theory

引言：积分学模块是高等数学课程中非常重要的内容，其内涵丰富、应用广泛，包含一元积分学和多元积分学，其最重要的思想方法和计算技巧都在一元积分学中得到体现，Newton—Leibniz公式更是微积分的精华。多元积分学是一元积分学的拓展推广，沿袭一元积分学中的知识体系，将积分区间推广至区域、曲线和曲面上，在应用上能初步解决更为复杂的几何、物理问题，可以说更为接近实际应用。

积分学内容是重点也是难点，尤其是积分类型多样、计算方法灵活，有的积分还要涉及方向的选择问题，通常情况下，学生在学习积分学时，对各单一类型积分能够做到基本理解和掌握，随着积分类型的增多和知识的累加，后期容易出现积分类型不会判定、积分方法不会选择、积分公式不会应用等一系列问题，而且知识之间混淆使用，导致各种错误，即使记住公式，由于积分本质没能理解，仍然是不会用、不会算。本文利用类比迁移法，基于统一理论，全面分析各型积分特点，构建各型积分之间的联系，帮助学生跳出局部思维模式，站在更高视角审视积分学，体会“登高望远”、“一览众山小”的获得感，体会数学之美（如简洁美），感受数学之真（如逻辑严谨），破解数学之难（如内容抽象），发现数学之用（如强有力的工具），从而全面理解和掌握积分学知识。

一、类比迁移法简介

类比迁移法，是新知识学习时的一种重要策略和方法，指在学习新知识和遇到新问题时，借助以往学过的知识或解决过的问题时积累的经验[1]，通过类比新旧问题的形式，深挖新旧问题的本质内涵，对已有的思维和方法，通过适当变化，迁移运用来解决遇到的新问题。该方法在解决新问题的过程中，能够不断优化认知结构，完善知识体系，创新思维方法，从而达到知识学习和问题解决的目的。在高等数学教与学中，对于一元微积分

ISSN:2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

到多元微积分的学习，可以充分利用类比迁移法，尤其是积分学教学中，面对类型多样的各型积分，抓住积分问题本质，利用积分体系间的联系，合理利用类比迁移法，不仅能顺利达到思维和方法的迁移，而且可以促进对知识的掌握，对积分学的全面理解作用明显，有力促进创新思维的培养和数学应用能力的提升。类比迁移法实施流程见图1.

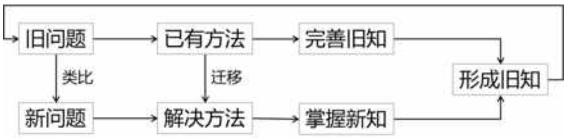

图1 类比迁移法流程示意图

二、类比迁移法实施

积分学模块大致分为一元积分学和多元积分学，进一步可细化为不定积分、定积分、二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等部分。不定积分主要介绍原函数的寻找方法和技巧，即为不定积分计算，主要为牛顿—莱布尼茨公式应用提供计算支持，也是后期其它积分的计算基础，其思想方法相对独立于其它类型的积分，在此不作介绍。本文利用类比迁移法，重点构建定积分、二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等知识之间的联系，立足“四个统一”，即思想方法统一、背景内涵统一、场论意义统一和计算方法统一，全面阐述各型积分之间的联系，力求理清积分知识脉络，帮助学生构建积分学知识体系。

1. 思想方法的统一

各型积分都具有一定的实际问题背景，其主要基于几何问题或物理问题的引入来展开，在解决问题的过程中，渗透重要的思想方法，然后经过高度抽象，得到相关积分的概念和形式。表现为积分学中的一种重要的“以直代曲”思想方法，蕴含“变与不变”的辩证关系，体现“近似与精确”的本质内涵，具体步骤是“大化小、常代变、近似和、取极限”，如曲边梯形面积A、曲顶柱体体积V、不规则几何体质量M、曲线形曲面形构件质量m、变力沿曲线作功W、不可压缩流体通过曲面流量Φ等问题，经过上述操作处理，最终都可得到特殊和式的极限，抽象以后即得

$$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i。$$

深刻理解和应用这种处理不规则图形、不均匀物体和带有方向的不确定问题量的思想方法，是学好积分学的第一步。具体教学中，需要紧扣问题本质，利用类比迁移法，在问题解决过程中不断强化这种思想方法和辩证思维，为由此发展而来的微元法的自然引入，打下必要的基础。

2. 背景内涵的统一

各型积分的要义在于被积函数$f(M)$形式与积分域Σ类型，各型积分虽然统一形式为$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma$，但是运用类比迁移法时，需要结合被积函数变量元数和积分区域维数进行理解。一般情况下，在几何上能够赋予意义的有一元函数和二元函数，物理上则可以有二元、三元及以上函数[2]。

几何范畴内，若被积函数为一元函数$y=f(x)$且积分域为区间$[a,b]$，其几何上表示曲边梯形面积，则为定积分$A=\int_a^b f(x)dx$。若在空间直角坐标系下，被积函数为二元函数$z=f(x,y)$且积分域为平面区域D，其几何上表示曲顶柱体体积，则为二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$。

物理意义下，对于被积函数为二元函数$z=f(x,y)$，主要是曲线积分，积分域为曲线区域L，若没有方向，其表示曲线形构件的质量，则为对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)ds$；若有方向，其表示变力沿曲线作功，则为对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$。对于被积函数为三元函数$u=f(x,y,z)$，主要有曲面积分和三重积分，若积分域为曲面区域Σ，没有方向时其表示曲面形构件的质量，则为对面积的曲面积分$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$；若有方向，其表示不可压缩流体流量，则为对坐标的曲线积分

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy。$$

若积分域为空间区域Ω，其表示空间几何体质量，则为三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$。总之，各型积分结合背景，紧密联系引例，最终可顺利回归具体定义形式。详情见表1。

表1 各型积分定义形式

积分类型	积分域	积分形式
定积分	$[a,\ b]$	$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b f(x)dx$
二重积分	平面域 D	$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$
三重积分	空间域 Ω	$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_D f(x,y,z)dv$
曲线积分	曲线域 L	$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\int_L f(x,y)ds$
曲面积分	曲面域 Σ	$\int_\Sigma f(M)\mathrm{d}\sigma=\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$

3.场论意义的统一

高等数学课程中，基于场论意义下的梯度、散度、旋度、通量和环流量[3]等概念，以及积分学中著名的三个公式Green公式、Gauss公式和Stokes公式，也是物理

学的场论中重要的公式，有着广泛应用，但在高等数学积分学教学体系中，并没有清晰明了的构建它们之间的联系，导致数学和物理学有一定的差异和鸿沟。本文利用场论知识，重新审视基于场论下的各公式的形式，进而统一积分学中著名的三个公式，这里主要利用旋度$rot\vec{A}$和散度$div\vec{A}$来对各公式形式进行统一。

（1）旋度形式

在空间向量场$\vec{A}=(P,Q,R)$中，由旋度意义，可得到旋度公式形式为：

$$rot\vec{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}。$$

现在封闭空间曲线Γ上，利用公式$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{ds}=\iint_D\left(rot\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S$，则可以得到

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}，$$

即为Stokes公式。

现从Green公式出发，探讨Green公式的第一种常见的形式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

将积分路径由空间曲线Γ简化到平面曲线L，探讨在二维平面向量场$\vec{A}=(P,Q,0)$中的旋度。利用类比迁移法，此时$P=P(x,y)$，$Q=Q(x,y)$，$R=0$，且缺少变量z，则二维平面上的旋度可简化为：$rot\vec{A}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$，于是Green公式在场论的旋度意义下的表示形式可以为$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L\vec{A}\cdot\vec{ds}=\iint_D\left(rot\vec{A}\cdot\vec{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。此举就统一了Green公式和Stokes公式。

（2）散度形式

设在空间上有流速场$\vec{A}=(P,Q,R)$，基于场论意义下可以得知，Gauss公式左边的P表示通过yoz面流量，Q表示通过zox面流量，R表示通过xoy面流量，公式右边的式子$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$表示单位时间单位体积内产生的流量，其也称为散度

$$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

则Gauss公式为

$$\Phi=\oiint_\Sigma\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega div\vec{A}dv$$

利用类比迁移法，现探讨Green公式在散度意义下的形式。假设在平面上有流速场$\vec{A}=(P,Q,0)$，通过底面在xoy平面上、高为单位1的柱体，其中底面边界曲线L封闭、取逆时针方向，求其单位时间内流过柱体的流量。容易得到曲线上任一点切向量为$\vec{T}=(\cos\alpha,\cos\beta,0)$，则该点指向外侧的法向量为$\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha,0)$，此时流量

$$\Phi=\oint_L\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\oint_L(P\cos\beta-Q\cos\alpha)ds=\oint_L-Qdx+Pdy。$$

在平面区域上，相当于R=0，P表示垂直通过y轴的流速，Q表示垂直通过x轴流速，计算通过曲线的流量，由此得到Green公式的第二种形式

$$\oint_L-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

同样可以得到散度为$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$。于是Green公式在场论的散度意义下表示形式也可表示为$\oint_L\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\iint_D div\vec{A}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是也统一了Green公式和Gauss公式。

4.计算方法的统一

（1）降维形式统一

重积分和曲线曲面积分的计算，核心在于降维，立足于定积分的牛顿–莱布尼茨公式，具体是三重积分降维成二重积分，二重积分降维成定积分。曲面积分可以利用Gauss公式转化为三重积分，然后再降维计算，或者转化为二重积分，再利用定积分计算。曲线积分可以利用Green公式转化为二重积分，或者利用定积分直接计算。各型积分计算之间的具体联系见图2。

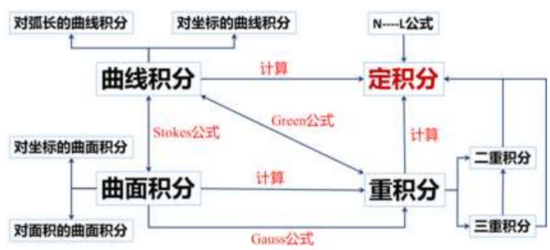

图2 各型积分关系图

（2）公式特点统一

积分学中四个公式，本质上都是把区域内部的积分问题转化为边界上函数值的计算问题，如牛顿–莱布尼茨公式，把$f(x)$在区间$[a,b]$内的积分转化为区间端点$x=a$，$x=b$的$F(x)$函数值之差问题，即$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-f(a)$；Green公式把平面区域$D$内的积分转化为区域边界曲线$L$上的积分计算，即$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。

类似的还有Gauss公式，把空间区域Ω内的积分转

Educational and teaching research, 教育教学研究(2)2022,4
ISSN:2705–1277(Online); 2737–4130(Print)

化为区域边界曲面Σ上计算，即：

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Stokes公式，把空间曲面区域Σ上的积分转化为区域边界曲线Γ上计算，即：

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

以上公式都实现积分域内部转化为边界的计算，体现了计算方法的统一美。

三、结束语

积分学的知识体系构建，需要全面把握本质内涵、表现形式和公式特点，通过迁移教学法，才能既做到顺利迁移，又可以完美统一，体现了“高屋建瓴“的升华。这也告诉学习者，学习数学时，在欣赏数学简洁美的同时，更要充分挖掘数学之慧，即学会思考，发挥想象力，依靠直觉，经过努力，破解数学之难，体会数学之真，才能提升创新思维，感受和探索数学之用。

参考文献：

[1]. 曲衍立，张梅玲. 类比迁移研究综述[J]. 心理学动态，2000.

[2]. 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第七版，北京：高等教育出版社，2015

[3]（美）H.M. 斯彻(H.M.Schey)著. 李雄伟等译. 散度、旋度、梯度释义（图解版）[M]. 机械工业出版社，2015.

作者简介：朱四如（1977.4 —），男，汉族，安徽枞阳人，理学硕士学历，副教授，主要从事数学教育和算法研究。