

数学教育与培养思维能力

廖冬梅

(重庆师范大学教育科学学院, 重庆 400000)

摘要: 中小学数学教育中, 知识教学和习题教学都强调培养学生的六种思维能力: 解读问题、简化问题、逻辑推导、反复探究、验证和反思。通过教育, 特别是数学教育培养这些思维能力非常重要。

关键词: 数学教育; 思维能力

小学和初中的数学教育强调六种思维能力。如所有人都认同的逻辑推理和抽象思维能力。从解决问题的视角, 六种思维能力包括: 1, 正确且全面地解读问题; 2, 简化问题(包括抽象思维); 3, 逻辑推导; 4, 反复探究; 5, 验证; 6, 反思。

一、义务教育阶段的数学教育强调六种思维能力

(一) 数学教育的知识教学强调抽象和逻辑等思维能力

人教版小学和初中数学的教学内容, 算术板块主要有数论和运算规则。几何板块的教学从点、线开始到平面图形, 到立体图形, 从静态图形到图形的运动。代数学板块要求学生理解代数的含义, 能灵活运用代数思维解决复杂问题, 能理解等式的意义和运算规则, 从静态地求方程的解提升到用函数式描述过程和趋势。在统计和概率板块, 引导学生认识和处理大数据以及不确定性。

抽象思维是数学的特点, 贯穿数学教育始终。如教一年级的小朋友认识最简单的数字, 到四年级引入代数知识, 要求学生理解用抽象(字母)代表抽象(数字)。1、2、3这些自然数是数学这个理念世界里最基本的抽象符号, 他们可以代表现实世界里的任何东西: 人、动物或者小到原子大到银河。奇妙的是数学还发明了用抽象代表抽象的方法, 用字母代表数字。诚然数学本身就是一个抽象出来的世界, 无论是由字母和数字组成的表达式、公式, 还是几何中的各种图形, 都不是直接对现实世界的拍摄。所以毋庸置疑, 数学教育强调抽象思维能力。

数学的知识教育中还强调逻辑推导能力。Wiki百科定义逻辑时强调两个关键点: 1, 有据可依; 2, 推导严密。以几何板块的教学为例, “几何证明”强调每推进一步必须有相应的公理、定理或已知条件作为依据, 以及“步骤二”必须是“步骤一”必然和唯一的推导结果, 即使是似乎显而易见的中间步骤也不能省略。这些正好和逻辑推导的两大要素不谋而合。类似地, 四则运算规定先乘除后加减, 先算小括号, 再算中括号等也促使学生在学习时根据规则分步骤进行思考, 步步推导以得到正确答案。所以数学知识教育中必然强调培养逻辑思维思维能力。

(二) 数学教育的习题教学强调六种思维能力

只听课不练习绝对学不好数学, 好比只在岸上听动作要领, 却不跳进水里去扑腾不可能学会游泳。每个学生都必须通过做习题亲身体验无数次的茫然无措、上下求索、百思不解, 再百折不挠到豁然开朗这些过程, 方能自己的神经系统里搭建起新通道从而提升思维能力。所以在数学教育中习题课占很大比重。习题教学的目标绝不是让更多的学生考高分, 而是使学生通过习题“搭建”和“操练”其神经系统, 提高思维能力。

下面这道小学六年级的关于“分数和比”的习题, 同时锻炼了“解读问题”“简化问题”“逻辑推导”“反复探究”“验证”和“反思”的思维能力。不仅如此, 还将这些能力转化成具体方法, 使思维从一个看不见摸不着的神秘概念变为具体的, 可以通过学习去提高的真实存在。

“春节来临之际, 蛋糕店对凤梨味, 核桃味, 绿茶味年糕(分

别记为 A, B, C) 进行混装, 推出了甲乙两种礼盒。礼盒的成本是盒中年糕成本和包装盒成本之和。甲每盒装有 6 个 A, 2 个 B, 2 个 C, 乙每盒装 2 个 A, 4 个 B, 4 个 C。每盒甲中年糕的成本之和为 1 个 A 成本的 15 倍。甲礼盒每盒的包装成本与乙礼盒每盒的包装成本之比为 3: 4。每盒乙的利润率为 20%。每盒乙的售价比每盒甲的售价高 20%。当该店销售这两种礼盒的总利润率为 25% 时, 甲乙两种礼盒的销量之比是多少?”

此题的难点在冗长的文字叙述, 十几个变量, 复杂的变量关系等, 实事求是说绝大多数六年级学生不可能凭一己之力完成挑战。从掌握基础知识的角度, 这道题难得没有必要, 而且因为有两处数字巧合才使此题可解, 从而使解题方法缺少通用性; 但从训练思维的角度, 这道题带给学生思维能力的挑战, 学生在解题或学习解题的过程中学到的思维方法都能很好提升他们的思维能力。

首先, 学生必须学会正确解读和简化问题。此时需同时用到三种简化问题的方法: 1, 分类, 如用列表法描述甲乙两种礼盒中配的年糕; 2, 抽象, 即用简洁的数字、符号和算式代替大段的文字, 如将“甲礼盒每盒的包装成本与乙礼盒每盒的包装成本之比为 3: 4。每盒乙的利润率为 20%。每盒乙的售价比每盒甲的售价高 20%。”转化为表达式, 分别为: 甲(包成): 乙(包成) = 3: 4; $\frac{\text{乙利润额}}{\text{乙成本}} = 20\%$; 乙(售价) = 甲(售价) $\times (1+20\%)$ 。

3, 找到本质。本题的本质在最后一句话“甲乙两种礼盒的销量之比是多少?”, 求“比”而不是求具体的数量。所以可以设甲和乙的销量分别为 q_1 和 q_2 , 求 q_1/q_2 的值即可。接下来还有对逻辑推导和反复探究能力的训练。如甲礼盒的成本 = 15A (题意), 但乙礼盒的成本需要推导:

$$\begin{aligned} \therefore \text{甲} &= 6A+2B+2C=15A \quad (\text{已知}) \\ \therefore 6A+2B+2C &= 15A \quad (\text{如果 } a=b, b=c, \text{ 则 } a=c) \\ \therefore 2B+2C &= 9A \\ \text{又} \therefore \text{乙} &= 2A+4B+4C \quad (\text{已知}) \\ \therefore \text{乙} &= 2A+2 \times (2B+2C) \quad (\text{分配律}) \\ \text{又} \therefore 2B+2C &= 9A \quad (\text{之前推导出的结论}) \\ \therefore \text{乙} &= 2A+2 \times 9A \\ &= 20A \end{aligned}$$

这样的推导过程无疑可以训练学生的逻辑推导能力, 包括每一步都有据可依和推导过程的严密性。其实如果此时直接把甲乙礼盒成本分别为 15A 和 20A 直接代入表达式计算, 仍然求不出解, 因为未知数太多。所以当这条路走不通时, 必须回到出问题的地方探索其他方法, 这便是思维能力中“反复探究”的能力。如根据本题求“比”的本质, 设甲和乙的糕点总成本为 X, 遂有甲的糕点成本 = $\frac{3}{7} X$, 乙的糕点成本 = $\frac{4}{7} X$, 又因为“甲礼盒每盒的包装成本与乙礼盒每盒的包装成本之比为 3: 4”, 所以设甲和乙的包装总成本为 Y, 则有甲的包装成本 = $\frac{3}{7} Y$, 乙的包装成本

$= \frac{4}{7} Y$ 。于是可以推出甲单盒糕点的总成本 $= \frac{3}{7} (X+Y)$ ，乙单盒糕点的总成本 $= \frac{4}{7} (X+Y)$ 。这样未知数便减到最少，最后就能一步步推导出答案4: 5。

“验证”和“反思”的思维能力更是做所有类型数学学习题的要求，特别地如求二次方程的根，必须将答案代回原方程验算；在老师讲完习题后也往往要求学生自己想想这种方法的要点和自己为什么会做错。

总之在小学和初中的数学课堂，知识教学和习题课都强调培养和提高六种思维能力，这即由数学的学科特点决定，也反映了义务教育阶段所规定的教育本质——通识教育。教育不为选拔优等生，而是为帮助每一个学生都具备更全面的知识，形成更高的思维能力，从而成为独立的思考者，去独立找寻各自生命的意义。

二、培养六种思维能力的重要性

(一) 培养“解读问题”的思维能力的重要性

作为起点，解读问题的思维能力包含两个要素：正确和全面。人类并非天生具备这个能力。环顾四周，有多少人在网络上读到“有研究表明……”时懂得去追问“谁做的研究？”“发表在哪里？”“研究设计科学与否？”又有多少人相互攻讦时没有误读对方的意思？在数学课堂，不难看到大量学生题都没读懂就开始做题或者把问题“小组二要多少？”中的“多”直接屏蔽，结果自然差之毫厘，谬之千里。

(二) 培养“简化问题”思维能力的重要性

简化问题的方法主要有三：分类；抽象化和找本质。以一道数学文字题为例，当学生正确且全面理解题意后，接下来要做的包括：从大段文字中提取真正有用的信息将它们用更抽象的字母表示；对关键信息进行分类；在纷繁的变量关系里找到本质。

简化问题的思维方法也正是现代科学发展的精髓之一。所有现代学科：语言学、社会学、物理学、天文学等，每个大学科下面分二级学科，三级学科和若干研究方向，都是试图通过对研究问题加以分类来简化问题和接近本质。

(三) 培养“逻辑推导”思维能力的重要性

人们做出错误判断时无外乎犯了两个错误：1，证据为假或信息片面；2，推导过程出现逻辑错误，如以偏概全或推导中缺失逻辑链条，仓促下结论等。逻辑是人类发明的一个非常伟大的思维工具，即使是在“实验法”非常盛行的今天，如果只有海量实验数据，但在建构模型或解读数据时犯了逻辑错误，最后往往得出谬误的结论。

可惜人类的本能思维习惯往往是非逻辑的：混乱、随意、随机。但将逻辑思维的方法教给孩子，并通过练习和强化变成孩子的思维习惯却可以通过教育实现。因为人的神经系统具有很强的可塑性。数学的学科特点使它可以作为非常好的培养孩子逻辑思维的工具，如几何证明题，学生在写下一连串的“因为”“所以”和每个“所以”对应的原因时，可以切实体会到“什么叫严密地推理”，“什么叫言之有据”。

(四) 培养“反复探究”思维能力的重要性

当面对问题的迷宫时，我们有时并不能一眼看到直达终点的道路，需要边走边看，错了再退回来尝试新路。此时需要的思维能力包括：在前路不清时仍有勇气大胆且小心前行；当前面的尝试走到绝路时有耐心返回原点重新探索新方法。如果没有这样的能力，人类在科学、技术和文化方面都不可能取得今天的成就。

但这样的思维能力和习惯并非与生俱来。在对小学生的调查中研究者发现：面对难题，特别是该类型的题他们从未做过时，

所有低段小学生都表现出程度不同的退缩和徘徊不前。普遍回答是：我都不知道该怎么做，当然就不做了！可见“尝试”“探索”“不行就重来”这些思维能力并非天生，也不能像“第二性征”一样会自动发育。这样的探索精神和能力必须通过教育习得。

(五) 培养“验证”思维能力的重要性

无论证伪还是验证，在科学和工作中都被大量运用。比如新冠疫苗被研发出来后，还必须进行动物实验、临床实验、跨人种、年龄、性别等的大规模的临床实验，以验证其有效性和安全性，至此才能宣布：成功研制出疫苗。

验证的思维能力在数学学习中直接表现为：验算答案。但在调查中研究者发现，“验算”也不是天生的能力，一年级的朋友都不会去主动验算，且验算这个习惯的培养需要花费大量时间和精力。“题目有三个问题，我只答了一个，我做完了没有去看题目。”“这个题我算出来有两个答案，但我没有验算，就漏了分母不能为0这个条件了。”类似的话数学老师要听好几年。所幸经过老师们的不懈努力，到初中时即使是最不喜验算的男孩也大都养成验算的习惯了。

(六) 培养“反思”思维能力的重要性

反思包括向外和向内两个方面。向外指：对解决问题的方法和步骤进行归纳，如去问：“这种类型的难题有哪些特征？解决它运用了哪些方法？”向内指对自身的思维展开思考，如问自己：“我为什么会觉得难？，这说明我的思维在哪些地方存在弱点？”。不难看出向外的反思可以帮助大脑以后快速识别问题并启动已经学会的解决系统。小学生在低段时确实不会做向内反思。当在数学学习或练习中失败时，他们普遍会“找替罪羊”，如怪题太难，怪老师没有讲；或者错误地归因于自己太粗心。他们不会主动意识到自己思维能力上真正的弱点，如畏难、对问题不求甚解、缺乏耐心、缺乏耐力等。但如果经过专门和不懈的引导，孩子们进入小学高段后都能学会向内反思。

反思是解决问题思维能力的终点。无论问题简单或复杂，解决问题的过程都应用“反思”来打句号。反思不仅能使我们在将来应对问题时更加胸有成竹，而且让我们可以把每一次问题解决的尝试都作为提升自己思维能力的练习和工具，最终收获更聪明的大脑。

数学家波利亚在《数学思维的新方法》一书中说：“在解决任何一道题目的过程中都会有点滴发现。它能激起你的好奇心……这样的经历会培养出对智力思考的热爱，并对思维和性格留下终身影响。”数学是思维的艺术，数学教育可以提升学生的思维能力，包括抽象、逻辑在内的六大思维能力，这些能力支持学生成长为独立的思考者和开拓者。

参考文献：

- [1] (美) G. 波利亚. 数学思维的新方法 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2018.
- [2] (美) 基思·德夫林. 数学思维导论 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2022.
- [3] 邵光华. 作为教育任务的数学思想和方法 [M]. 上海: 上海教育出版社, 2014.
- [4] 史宁中. 数学中的归纳推理 [M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2014.

作者简介：廖冬梅（1974—），女（汉族），重庆，博士，副教授，硕士研究生导师。工作单位：重庆师范大学教育科学学院。2006年美国佛罗里达大学访问学者，研究方向：数学教育、英语教育、家庭教育。