浅谈一题多解在数学习题课中的作用

罗槐珍　聂钱树

（杭州市临安区职业教育中心，浙江 杭州 311300）

摘要：高三复习课是每个教师都非常重视的课题，而且数学在高考中的分值是占分最高的课程之一。历来都是复习的重中之重。对于数学的复习简单讲，无非就是知识点的整理和相关题型的练习与讲解。每个教师都希望把复习课充分上好：知识点梳理全面、系统且清晰有条理；习题充分讲解、剖析和拓展。以往的习题课通常是教师讲解母题，学生按照教师的要求完成相关知识点的衍生题或拓展题，这样可以让学生“现学现卖”，巩固所学的知识及解题思路，如此不断地重复循环，可以锻炼学生的解题能力和技巧，对学生考取高分，特别是面对应试的挑战，学生是具备一定的能力的。这样的教学方式，虽有一定的成效，但是完全忽略了学生的思维的拓展，对学生成长及创新能力的提高毫无裨益，也就是除了让学生拿到高分，学生毫无数学素养可言。那么如何把习题课的效果提高，且对学生的成长及发展更有帮助，进而能提高学生数学思维呢？当然这个问题的答案显然是见仁见智的，笔者从一题多解的角度进行切入，以达到启发学生思考和提升数学素养的目的，进而提高习题课复习的效率。

关键词：一题多解；切入点；解题能力

既然注重一题多解，我们得了解一题多解的好处。什么是“一题多解”？简言之，就是从不同的角度考虑、找到不同的切入点、按照不同的思路、用不同的方法，给出同一道习题解答过程。所谓条条大路通罗马。教师在教学过程中实施“一题多解”对学生有什么好处呢？

1.“一题多解”有利于充分调动学生的积极性，在教师的启发和引导下，对同一道题目学生可以提出两种、三种甚至更多种解决方法，这本身就是一种能力的体现。课堂成为学生相互合作，探究知识的场所，能有效提高学生学习的积极性，增加学生学习知识的信心。

2.“一题多解”有利于锻炼学生的思维的灵活性，面对同一问题更好的拓宽思路，让学生能够根据题目给出的已知条件，并结合自身对知识结构的理解和掌握的情况，灵活的选择合理的解题切入点。也能够快速地接收到已知条件中所传达的有效信息。

3.“一题多解”有利于学生积累解题的经验，丰富解题的方法，增强了学生综合运用已有的知识的能力，不断提高解题能力。久而久之，经验积累，还能预判某些知识点的中出题者的思路和方向。从而提高了学生的学习兴趣，提高了学生克服困难的信心。

总之，“一题多解”有利于学生思维能力的提高，学习信心的增加和解题能力的提高。

以下是笔者在实际教学中，曾用到的一些例题。这些例题都是比较能够启发学生思考的，同时也是学生应用“一题多解”反响比较好的例题。从中可以得到比较多的启发，想法不成熟，供同行参考，相互交流学习，希望能够有抛砖引玉的作用。

例一、已知 $\alpha \in R$，$\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{\frac{10}{4}}$，求 $\tan2\alpha$ 的值为____________。

方法一：运用方程（组）思想解决。引导学生看已知条件中有 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$，最先想到的应该是平方和为 1 的关系。由此建立方程组解决问题。具体解法如下：

$$\begin{cases}\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{\frac{10}{4}}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$$

联立解得 $\begin{cases}\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{10}}\\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{9}{10}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{10}}\\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{10}}\end{cases}$

所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=3$，所以 $\tan2\alpha=-\frac{3}{4}$

方法二：运用“1”的代换思想解题。

由 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{\frac{10}{4}}$ 可得 $(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=\frac{5}{2}$，所以

$\frac{\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha}{\sin 2'\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{5}{2}$，$\frac{\tan^2\alpha+4\tan\alpha+4}{\tan^2\alpha+1}$，

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=3$，所以 $\tan2\alpha=-\frac{3}{4}$

方法三、运用“升降幂”思想解题。

由 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{\frac{10}{4}}$ 可得 $(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=\frac{5}{2}$，

$\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=\frac{5}{2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$，所以 $\frac{3}{2}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)-4\sin\alpha\cos\alpha=0$，$-\frac{3}{2}\cos2\alpha-2\sin2\alpha$，所以 $\tan2\alpha=-\frac{3}{4}$

方法四、运用“辅助角公式”解题。

由 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{\frac{10}{4}}$ 可得 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{5}\sin(\alpha+\phi)=\sqrt{\frac{10}{4}}$，$\sin(\alpha+\phi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，其中 $\tan\phi=2$，$\alpha+\phi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha+\phi=2k\pi+\frac{3n}{4}$，$k\in z$，所以 $\tan2\alpha=\tan(2\alpha+2\phi-2\phi)=\tan(\frac{\pi}{2}-2\varphi)=\frac{1}{\tan2\varphi}=-\frac{3}{4}$

此题难度不大，有多种解法，相对而言，解法二更为简洁明了，但解法一才是绝大多数学生会采用的通常解法，本题鼓励“一题多解”对于学生加深理解平方关系和商的关系，在实际解题目中的应用，同时也用到了 2 倍角公式和辅助角公式，对学生是一个很好的拓展练习的题目，大大提高了同一习题的最大的利用率和学生思维的开拓，对于学生的成长和整个知识体系的掌握有非常好的引导和启发作用。同时教师更加明确，学生对于数学知识的学习，不仅仅要会解题，还要了解涉及的知识点，同时还要形成数学思维，通过思考和分析的方式来了解数学规律，促进学生

在探究中深化认识概念体系和多角度剖析问题，发现问题的本质。从多角度引导学生，活跃学生思维，实现学生思维品质的提升。

例二、已知 x，y ＞ 0，且满足 $x^2+3xy+4y^2=14$ 求 x+2y 的最大值为_______。

方法一：因为目标中有 x 和 2y，条件中又有 x^2 和（2y）^{2} 只要教师稍加引导，一般学生都能想到配凑（x+2y）^{2}，进而把（x+2y）看成一个整体进行求解，此处可根据学生具体情况引导学生考虑是否需要换元。最后引导学生取等条件不能忘，并进行相应的求解。

具体解题过程：目标的配凑和基本不等式的应用。由 $x^2+3xy+4y^2=14$

可得：$(x+2y)^2-14=\frac{1}{2}x2y\le\frac{1}{2}(\frac{x+2y}{2})^2$，令 t= x+2y 得 $t^2-14\le\frac{7}{8}t^2$ 所以 x+2y ⩽ 4 得 x+2y 的最大值为 4。取等条件：$x^2+3xy+4y^2=14$ x =2y 当且仅当 x=2，y=1 时取等。

方法二：判别式法。通常有两个未知数，并且条件给予一个关于这两个字母的等量关系，求其中一个的取值或者两个变量的和或者差的取值范围。设所求为 k，然后用 k 的代数式表达其中一个字母，进而得到关于所求字母或者代数式的一元二次方程，从判别式中求得所对应的解。适当引导学生非常容易想到。

具体解法：$x^2+3xy+4y^2=14$（1）令 k=x+2y（k ＞ 0），将 x=k−2y 代入（1）式得 $2y^2+ky+k^2-14=0$ 可得 $=-7k^2+112\geqslant 0$

$\begin{cases}\Delta=-7k^2+112\ge 0\\ k>0\end{cases}$ 所以 k 的最大值为 4。

方法三：柯西不等式。$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$ 从柯西不等式二维形式的结构可以看出，给定的式子有平方，右边是两个字母积的和的形式。求 x+2y 两个参数和的最大值，刚好符合该结构。所以我们的思路是从已知条件大胆尝试配凑：左边为平方和与平方和的乘积结构，配出右边所求结构。具体解法如下：

由 $x^2+3xy+4y^2=14$ 可得 $[(x+\frac{3}{2}y)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}y\right)^2][1^2+\sqrt{\frac{1}{7}})^2]\geqslant(x+2y)^2$ 所以（x+2y）的最大值 4。

方法四：三角换元。其实只要方法三中的配凑出来了，三角换元的思路必然是会引出来的，因为两者有共同的特征就是平方和为常数，是典型的三角换元和柯西的基本形式之一。具体解法如下：

由 $x^2+3xy+4y^2=14$ 得 $(x+\frac{3}{2}y)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}y\right)^2=14$，令 $x+\frac{3}{2}y=\sqrt{14}\cos\theta$，$\sqrt{\frac{7}{4}}y=\sqrt{14}\sin\theta$，$\theta\in(0,\sqrt{\frac{\pi}{2}})$，$x=\sqrt{14}\cos\theta-3\sqrt{2}\sin\theta$，$y=\sqrt{14}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=4\sin(\theta+\phi)$，所以当 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$ 时，（x+2y）有最大值，最大值 4 本题解决的是求最值问题，解法一为常规解法，充分体会了转化思想，尤其是把所求目标转化为，已知条件中存在的等量关系进行变式，然后用基本不等式构造成一元二不等式，这是常见的思考方式，也是相当重要的数学思维，把 x+2y 看成整体进而求解一元二次不等式的过程，是换元思想的体现，也是基本不等式的基本应用。本题中基本不等式作为中间的过渡过程的应用，须重视取等条件是否成立，而不是盲目只去套用基本不等式，对于基本不等式的前提条件也必须是烂熟于心。基本不等式是主要应用于求某些函数的最值及证明的不等式常用的方法。其表述为：两个正实数的算术平均数大于或等于它们的几何平均数。在使用基本不等式时，要牢记“一正”“二定”“三相等”的七字真言。“一正”就是指两个式子都为正数，“二定”是指应用基本不等式求最值时，和或积为定值，“三相等”是指当且仅当两个式子相等时，才能取等号。基本不等式是高中数学的重要考点，一般来说考查的难度不算大，是高中生必须要掌握的非常重要的知识点。基本不等式最大的难点，应当是配凑定值。需要多做习题，学会观察，抓住主要矛盾进行配凑是关键。

解法二，利用了判别式法（又称万能 K 法），这种方法有时计算量会相对比较大，但难度不大。万能 k 法的适用范围如下：一般万能 K 法求最值的适用条件需要同时满足以下两点：（1）给定的约束条件中含有二次项。（2）给定的等式是所求的目标函数是线性函数。万能 K 法求最值的步骤相对比较单一，首先将所求的目标函数设为 K，然后用 x 表示 y 或者用 y 表示 x，接着再代入已知条件给定的约束条件，从而得到一个关于 x 或者 y 的一元二次方程。由于约束条件在实数范围内成立，所以得到的一元二次方程是存在实数根，即判别式大于等于零，从而得到一个关于 K 的不等式，最后解出这个不等式就能得到目标函数的最值。

解法三利用了柯西不等式。该不等式虽然加入教材没有多少年头。但其知名度极高，与权方和不等式、幂平均不等式、卡尔松不等式和排序不等式等等诸多著名的不等式都有着千丝万缕的联系。高中阶段一般懂得掌握和使用二维形式的即可，通过观察柯西不等式，可以发现其特点是：不等式左边是两个因式的积，其中每一个因式项都是有平方的，右边是左边中对应的两项乘积之和的平方（可简称为方的和的积大于等于积的和的方）因此，构造两组数或式，便是应用柯西不等式的一个主要技巧。利用柯西不等式解决最值问题，通常设法在不等式一边得到一个常数，即配凑定值。并寻求不等式取等号的条件 . 题中要求 x+2y 的最大值的式子通过给定条件变形得到和的方，然后再配凑一组常数的方的和，配凑的主导思想就是，按照公式指定项相乘后再相加，得到右边所需要的即所求的目标的平方，最后进行开方运算即可。可以说配凑所求式依然是该题最大的难点。一般如果题目中给定可以配凑成方的和，而所求是一次式相加的最大值，则可考虑柯西不等式。反之，若给定的是两个式子的和，所求为平方和的最小值，也可考虑柯西不等式，一言以蔽之：按照公式的结构来配凑。解法四，利用了三角换元法。三角换元法指用一个三角变量代替某个可以看成一个整体的复杂式子，可使问题简化，作为数学解题中的常见的换元技巧，三角换元法利用已知代数值和三角知识中存在的联系进行换元，应用三角换元法将代数函数转化为三角函数，其关键在于构造元与设元，合理的三角换元能够实现化繁为简，获得一种简洁明了的结构，进而简化解题的过程。该方法用途非常广泛，通常碰到两个式子平方和形式都可考虑使用三角换元来解决。简单地说，三角换元法是三角函数替换问题中的字母或式子，并利用三角函数之间的关系实现解题目的的方法，求函数最值时通常会用辅助角公式一起并用实现最值问题的解决。

综上所述，每种题型都有相对比较合适的解题方法，要找到相对适合的方法进行数学问题的解决，需要通过平时的多观察，多做习题，多总结。而“一题多解”无疑是达到这种效果的最佳途径之一。

参考文献：

[1] 沈德立 . 高效率学习的心理学研究 [M]. 北京教育科学出版社，2006.

[2] 陶兴模 学困生学习心理障碍分析及对策 [J]. 数学教育学报，2004（2）：45−48.