

人教 A 版（2019）与湘教版（2019）教材的对比分析

——以普通高中数学教材“三角恒等变换”为例

蒋湘湘 周学君* 陈真真

（黄冈师范学院，湖北黄冈 438000）

摘要：我国目前正处于“第八次”教育改革中，较为常见的现象为一个课程标准对应多个版本的教材。教材的多样化能促进教师和学生的双边活动，但在教材改革时，仍会存在一些问题，比如教材内容多少、例题难度等。本研究以人教 A 版（2019）和地方教材湘教版（2019）为对象，选取三角恒等变换这一模块进行比较。采用内容分析法、文献分析法和比较研究法，从知识呈现和例题难度两个方面进行比较，发现两版教材在整体内容上差异不大，但湘教版（2019）呈现出更多的公式，例题数量比人教 A 版（2019）略多，综合难度略低于人教 A 版（2019）。结合两版教材的特点和优势，可知两版教材各有千秋。本研究从教材使用和编写两个方面对两版教材提出相关使用建议，教师也可以将两版教材结合使用，以达到教学效果最优化。

关键词：高中数学；教材对比；三角恒等变换

在第八次教育改革中，国务院提出将教学大纲改为学科课程标准，倡导教材多样化，鼓励相关部门依据国家课程标准组织编写教材，形成“一标多本”教材建设格局。课本是课程标准的直接表现载体，也是教师进行教学的蓝本，更是学生学习的资料。部分教师教学仅局限于学校发放的教材，而不去寻求其他有效的优质资源是目前教学的现状，长期这样教学不仅会导致教师教学质量停滞不前，同时也会使得学生学习兴趣、学习成绩和学习能力得不到提高甚至下降。新课程改革提出教师要用教材教，而不只是教教材；同时学生也不能单纯地依靠教材，要学会用教材。因此研究教材，发掘各版教材的优势，对教师 and 学生的双边活动都有积极意义，能够帮助教师教学更快更准地落实“立德树人”的目标，帮助学生合理有效地使用教材，习得系统的知识，提升学习能力和落实数学学科核心素养。

本研究选取的两版教材分别是人民教育出版社出版的高中数学教材（以下简称人教 A 版（2019））和湖南教育出版社出版的高中数学教材（以下简称湘教版（2019））。人教 A 版是全国范围内使用范围最广的教材，湘教版是地方性教材，其以学生为本重视培养学生的数学核心素养和数学方法，优点突出，由此选择这两本教材。本研究以三角恒等变换为切入点，从知识呈现和例题难度两个模块进行比较，基于客观真实地视角反映出两版教材的差异性。希望教师在教学中能够采纳多方教材，优中选优，打造更优质课堂；学生在学习中得到进一步提高。

一、两版教材的知识呈现对比

根据教材中“三角恒等变换”的内容，我们从引入、思考探索、知识证明、知识表征、知识反思、信息技术、数学思想、数学史和数学文化这九个维度进行比较。如表 1 所示。

表 1 两版教材三角恒等变换知识呈现对比

教材版本	人教 A 版（2019）	湘教版（2019）
引入	以诱导公式为问题背景，提出将特殊值换成任意角，他们之间会有什么关系	以平面坐标系点的坐标为问题背景，提出两个角的三角函数值怎么求两个角之间差的三角函数值
思考探索	如何用任意角的正余弦表示他们和与差的正余弦	探究两个角差的余弦值
知识证明	利用两点之间的距离和换元思想两种方法	利用平面向量的知识和换元思想两种方法
知识表征	在计算或者证明之后用单独矩形框给出符号表征，给出文字表征	在计算或者证明之后用单独矩形框给出符号表征，给出文字表征
知识反思	在章节末尾有本章知识结构图和回顾与思考	在章节末尾有本章知识结构图和回顾与思考
信息技术	利用信息技术制作三角函数表	无
数学思想	直接表明换元思想和转化与化归思想	未明说，需要学生自行领悟
数学史	无	无
数学文化	无	电子琴为什么能模拟不同乐器的声音

由表 1 可知，两版教材在知识呈现上有些许不同，主要差异如下。

在知识获取阶段，两版教材都是通过问题导入，但解决问题所用到的方法不一样，人教 A 版（2019）通过在单位圆中圆弧所对应的弦相等，再根据两点之间的距离公式得出差角的余弦公式，而湘教版（2019）则通过数量积和平面向量基本定理得出差角的余弦公式。

两版教材在推导两角和与差的正弦和正切公式也有些许差异。人教 A 版（2019）通过之前推导的两角和与差的余弦公式，提示根据之前所学习的诱导公式五或六能推出两角和与差的正弦公式，就直接给出正弦和正切的和差角公式。湘教版（2019）将两角和与差的正弦和正切公式单独成为一小节，通过换元思想，并通过给出详细步骤得出公式。

在编写二倍角的三角函数上也略有不同。人教 A 版（2019）

将其放在两角和与差的正弦、余弦和正切公式这一节内容中，没有具体的过程，直接给出二倍角的正弦、余弦、正切公式，并在后面给出二倍角的余弦公式中仅含 α 的正弦和余弦的公式。而湘教版（2019）中通过换元思想并有具体的步骤给出二倍角公式，但未给出二倍角的余弦公式中仅含 α 的正弦和余弦的公式。

两版教材都在简单的三角恒等变换中先给出了半角公式，后给出和差化积与积化和差公式，但给出的形式不同。人教A版（2019）通过例题计算得出的答案，在旁白的矩形框中给出半角公式；在和差化积与积化和差公式部分，通过例题证明得出公式，但未表明公式的名称。而湘教版（2019）则直接放在知识点中进行讲解并有具体步骤而给出公式，并在之后通过例题给出万能公式，学生可以直接在教材上学习这部分内容；人教A版（2019）未给出万能公式，这部分知识需要老师上课额外拓展才能了解；在另一部分内容上，在直角坐标系中，通过平面向量知识推导出公式并给出其名称。

两版教材在简单的三角恒等变换中都提及通过和差角公式的逆运用来求函数周期、最大值和最小值，但是所用的篇幅和思想

不一样。人教A版（2019）直接给出例题，通过分析所给函数形式与和差角公式展开后的式子进行对比，转化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 进而得出函数周期、最大值和最小值。湘教版（2019）首先提出如何对 $\sin x+\cos x$ 这种形式进行三角恒等变换，随后借助计算机画出该函数部分图像，通过观察图象，发现问题，接着提出猜测是否能转化为 $y=A\sin(x+\varphi)$ ，紧接着通过探究得到公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ ，再举例说明并巩固知识。

在信息技术和数学思想方面，人教A版（2019）做得更好，能让学生更加直观地学习到怎样去做表和表述数学思想。两版教材在该知识模块均未涉及数学史。在数学文化方面，湘教版（2019）做得更好，与实际生活相联系，通过探究身边的事物电子琴来发现数学的奥秘，能让学生更好地理解该部分内容。

三、两版教材的例题难度比较

在鲍建生教授2002年建立的数学题综合难度模型的基础上，王建磐、鲍建生于2014年根据青浦实验得出的数学认知水平框架对原模型进行了修正。本文采用的研究工具就是修正之后的难度模型。修正之后的难度因素如表2所示。

表2 数学习题的难度因素与水平

水平 \ 难度因素		难度因素			
		1	2	3	4
1	背景 (A)	无背景 (A1)	个人生活 (A2)	公共常识 (A3)	科学情境 (A4)
2	数学认知 (B)	操作 (B1)	概念 (B2)	领会-说明 (B3)	分析-探究 (B4)
3	运算 (C)	无运算 (C1)	概念 (C2)	简单符号运算 (C3)	复杂符号运算 (C4)
4	推理 (D)	无推理 (D1)	简单推理 (D2)	复杂推理 (D3)	
5	知识综合 (E)	一个知识点 (E1)	两个知识点 (E2)	多个知识点 (E3)	

利用下面公式计算教材中的例题在各个因素上的加权平均值：

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} (i=1,2,3,4,5; j=1,2,\dots)$$

其中， d_i 表示第 i 个难度因素上的加权平均值， d_{ij} 表示第 i 个难度因素的第 j 个水平的权重，采用等级权重，即 $d_{ij}=j$ ； n_{ij} 则表

示这套教材例题中属于第 i 个难度因素的第 j 个水平的题目的个数，而 n 是该版本教材例题的总数。显然，对任何的 i ，都有 $\sum_j n_{ij}=n$ 。

根据综合难度计算公式，对两版教材中三角恒等变换例题的统计结果如表3所示。

表3 两版教材三角恒等变换例题各难度因素统计表

难度因素	等级水平	题量		百分比		加权平均	
		人教A版(2019)(10)	湘教版(2019)(22)	人教A版(2019)	湘教版(2019)	人教A版(2019)	湘教版(2019)
背景	无背景	10	20	100%	90.91%	1	1.09
	个人生活	0	2	0%	9.09%		
	公共常识	0	0	0%	0%		
	科学情境	0	0	0%	0%		
数学认知	操作	2	6	20%	27.27%	2.4	1.95
	概念	4	13	40%	59.09%		
	领会-说明	2	1	20%	4.55%		
	分析-探究	2	2	20%	9.09%		
运算	无运算	0	0	0%	0%	3.7	3.45
	数值运算	0	0	0%	0%		
	简单符号运算	3	12	30%	54.55%		
	复杂符号运算	7	10	70%	45.45%		

推理	无推理	2	5	20%	22.73%	2	1.95
	简单推理	6	13	60%	59.09%		
	复杂推理	2	4	20%	18.18%		
知识综合	一个知识点	4	12	40%	54.54%	1.7	1.5
	两个知识点	5	9	50%	40.91%		
	多个知识点	1	1	10%	4.55%		

将两版教材的各难度因素的加权平均值进行整理分析,从而得到例题综合难度统计表格和对应的雷达图.如表3和图1所示.

表4 两版教材三角恒等变换例题综合难度统计

教材版本	背景	数学认知	运算	推理	知识综合
人教A版(2019)	1	2.4	3.7	2	1.7
湘教版(2019)	1.09	1.95	3.45	1.95	1.5

从表格数据上分析,两版教材在数学认知和运算这两方面的难度略高于其他方面,这与三角函数本身的知识内容相关.在运算方面涉及各种复杂公式的单独应用和综合应用,这就加大了运算的难度.在数学认知方面,由于两版教材在本节内容上的例题大部分都是纯数学背景,极少甚至没有与现实生活相关的例题,这就对学生理解和接受知识的能力提出了更高的要求,自然而然就加大了学习的难度.

版(2019)而言,缺少了新知后的例题和知识之间的一些过渡性例题.湘教版(2019)的例题设置更符合学生的最近发展区,更有利于教学.总体来说,人教A版(2019)的总体综合难度比湘教版(2019)大,主要体现在背景和推理两方面.

通过对人教A版(2019)和湘教版(2019)三角恒等变换的知识呈现和习题难度两个模块的分析,得出两版教材各有千秋,既考虑到了学生已有的认知结构,又都关注到了提高和发展学生逻辑推理、数学运算的数学能力和核心素养.落实了“以学生发展为本,立德树人,提升素养”的新课标理念.

参考文献:

[1] 王晓丽,张珊珊.我国基础教育“教材多样化”:进展、问题及建议[J].课程·教材·教法,2021,41(01):16-20.
 [2] 中学数学课程教材研究研发中心.普通高中课程标准实验教科书:数学(必修第一册)[M].北京:人民教育出版社,2021.
 [3] 张景中.普通高中教科书:数学(必修第二册)[M].湖南:湖南教育出版社,2021.
 [4] 王学萌,胡典顺.中俄高中数学教材的比较及启示——以“三角恒等变换”的对比为例[J].数学教学,2020(03):42-47+37.
 [5] 鲍建生.中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J].全球教育展望,2002,31(09):48-52.
 [6] 高文君,鲍建生.中美教材习题的数学认知水平比较——以二次方程及函数为例[J].数学教育学报,2009,18(04):57-60.

基金项目:黄冈市教育科学规划课题“表现性评价在高中数学建模活动教学的实践研究”,2022GB36.

作者简介:

蒋湘湘,女,湖南岳阳人,黄冈师范学院2021级(学科教学·数学)专业学生;
 周学君,男,湖北蕲春人,博士,副教授,硕士研究生导师,主要研究方向为数学建模教学研究;
 陈真真,河南漯河人,黄冈师范学院2021级(学科教学·数学)专业学生.

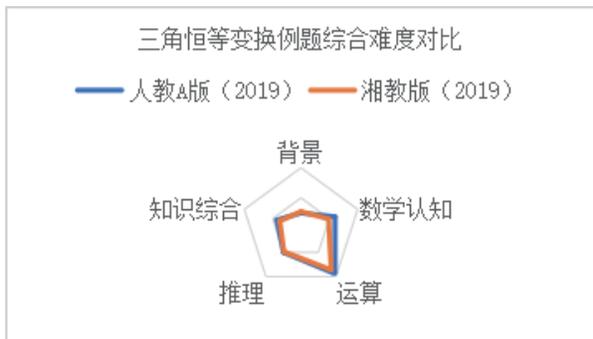


图1 两版教材三角恒等变换例题综合难度雷达图

由图1了解到两版教材例题的综合难度差异较小,尤其在背景和推理两个方面,从图上看几乎是重合状态,数据只差0.04和0.05.但是总的来看,湘教版(2019)的综合难度略低于人教A版(2019).主要是因为湘教版(2019)在例题背景方面不是纯数学背景,涉及到了两个个人生活的背景,而人教A版(2019)没有设置该类型的例题.在数学认知、运算和知识综合这三个方面,人教A版(2019)比湘教版(2019)要高,主要是因为人教A版(2019)涉及的两个知识点和多个知识点的例题比湘教版(2019)要多一点.

五、结论

从知识呈现上看,两版教材在知识小节和公式呈现的数量上有些许差异.两版教材在三角恒等变换内容上基本一致,湘教版(2019)在小节的题目上的设置更加精准严谨,对于和差角公式的编写更有清晰和更具有逻辑性,比人教A版(2019)多了万能公式.

从例题设置和难度看,人教A版(2019)例题的数量远少于湘教版(2019).在三角恒等变换这一部分内容上,人教A版(2019)在学习新知后,安排的例题较少,且难度跨度较大,相较于湘教