ISSN:2705-0971(Print); 2705-0947(Online)

二次函数系数的另解方法

赵信诚

北京市日坛中学高一六班　北京　100020

摘　要：二次函数是数学函数模块的重要组成部分，该类题目考察重点包含对于二次函数解析式的求解。九年级教材中在任意一次函数上的两点来求该函数解析式系数的方法是将两个已知点的坐标代入方程组，通过解方程组得以求解。本研究设想通过解方程组来求二次函数的解析式，通过一次函数的系数 (k) 可以直接用点坐标来计算，进一步通过点坐标构建三元一次方程组推导解出二次函数各项系数。此方法在二次函数解析式求解过程中得到了合理的应用。

关键词：另解方法；二次函数；坐标；方程组

1 研究背景

在求解一次函数解析式（y=kx+b）的过程中，设两点坐标分别为（x_1，y_1），（x_2，y_2），则 $y_1=kx_1+b$ ①，$y_2=kx_2+b$ ②，由① - ②得 $kx_1-kx_2=y_1-y_2$，即 $k(x_1-x_2)=y_1-y_2$，通过移项可得 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，然后将 k 代入解析式就可以求得 b 的值。因此本文利用一次函数解析式系数的求法，将二次函数解析式系数通过点坐标表示。

2 研究目的

通过研究二次函数的另解方法及求解三元一次方程组，简化了在仅给出至少三个坐标的情况下求二次函数解析式的解法，同时提高了计算效率和逻辑推理的能力。

3 研究过程

1. 题目：在平面直角坐标系中，若点 A（x_1，y_1），点 B（x_2，y_2），点 C（x_3，y_3）均在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 上，求此二次函数解析式。

解∵此函数为二次函数

∴设此函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$

∵点 A、B、C 在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 上

∴ $a(x_1)^2+b(x_1)+c=y_1$ ①

$a(x_2)^2+b(x_2)+c=y_2$ ②

$a(x_3)^2+b(x_3)+c=y_3$ ③

由①－②得 $a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=y_1-y_2$

$$a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+b(x_1-x_2)=y_1-y_2$$

$$(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]=y_1-y_2$$

$$a(x_1+x_2)+b=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad ④$$

由②－③得 $a(x_2^2-x_3^2)+b(x_2-x_3)=y_2-y_3$

$$a(x_2+x_3)(x_2-x_3)+b(x_2-x_3)=y_2-y_3$$

$$(x_2-x_3)[a(x_2+x_3)+b]=y_2-y_3$$

$$a(x_2+x_3)+b=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3} \quad ⑤$$

由①－③得 $a(x_1^2-x_3^2)+b(x_1-x_3)=y_1-y_3$

$$a(x_1+x_3)(x_1-x_3)+b(x_1-x_3)=y_1-y_3$$

$$(x_1-x_3)[a(x_1+x_3)+b]=y_1-y_3$$

$$a(x_1+x_3)+b=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} \quad ⑥$$

由④－⑤得：$a(x_1+x_2-x_2-x_3)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$

$$a(x_1-x_3)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$$

$$a=\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{y_2-y_3}{(x_2-x_3)(x_1-x_3)}$$

由④－⑥得：$a(x_1+x_2-x_1-x_3)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$

$$a(x_2-x_3)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$$

$$a=\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}-\frac{y_1-y_3}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

由⑤－⑥得：$a(x_2+x_3-x_1-x_3)=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}-\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$

$$a(x_2-x_1)=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}-\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$$

$$a=\frac{y_2-y_3}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}-\frac{y_1-y_3}{(x_1-x_3)(x_2-x_1)}$$

由④得：$b=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-a(x_1+x_2)$

$$b=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\frac{a(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$b=\frac{y_1-y_2-a(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

由⑤得：$b=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}-a(x_2+x_3)$

$$b=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}-\frac{a(x_2^2-x_3^2)}{x_2-x_3}$$

$$b=\frac{y_2-y_3-a(x_2^2-x_3^2)}{x_2-x_3}$$

由⑥得：$b=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}-a(x_1+x_3)$

$$b=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}-\frac{a(x_1^2-x_3^2)}{x_1-x_3}$$

$$b=\frac{y_1-y_3-a(x_1^2-x_3^2)}{x_1-x_3}$$

由①得：$c=y_1-a(x_1)^2-b(x_1)$

由②得：$c=y_2-a(x_2)^2-b(x_2)$

由③得：$c=y_3-a(x_3)^2-b(x_3)$

$$\therefore\ a=\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{y_2-y_3}{(x_2-x_3)(x_1-x_3)}$$

$$b=\frac{y_1-y_2-a(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$c=y_1-a(x_1)^2-b(x_1)$$

或

$$a=\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}-\frac{y_1-y_3}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$b=\frac{y_2-y_3-a(x_2^2-x_3^2)}{x_2-x_3}$$

$$c=y_2-a(x_2)^2-b(x_2)$$

或

$$a=\frac{y_2-y_3}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}-\frac{y_1-y_3}{(x_1-x_3)(x_2-x_1)}$$

$$b=\frac{y_1-y_3-a(x_1^2-x_3^2)}{x_1-x_3}$$

$$c=y_3-a(x_3)^2-b(x_3)$$

2. 验算及对比：

题目 1：如果一个二次函数图像经过（-1,10），（1,4），（2,7）三点求出这个二次函数的解析式。

方法①解方程组：

解：设所求二次函数图像为 y=ax² +bx+c

由已知，函数图像经过（-1,10），（1,4），（2,7）三点，得出关于 a，b，c 的三元一次方程组

a-b+c=10 ①

a+b+c=4 ②

4a+2b+c=7 ③

由①—②得：— 2b=6

b= — 3 ④

把④代入②得：a — 3+c=4

a+c=7 ⑤

把④代入③得：4a — 6+c=7

4a+c=13 ⑥

由⑥—⑤得：3a=6

a=2 ⑦

将⑦代入⑤得：2+c=7

c=5

a=2

b= — 3

c=5

∴所求二次函数解析式为 y=2x² — 3x+5

方法②另解方法：

$a=\frac{6}{2}-\frac{3}{3}=2$

$b=\frac{-3-2(1-4)}{-1}=-3$

c=10 — 2 — 3=5

∴所求二次函数解析式为 y=2x² — 3x+5

题目 2：如果一个二次函数图像经过（1,12），（0,5），（-1,4）三点求出这个二次函数的解析式。

方法①解方程组：

解：设所求二次函数图像为 y=ax² +bx+c

由已知，函数图像经过（1,12），（2,25），（-1,4）

ISSN:2705-0971(Print); 2705-0947(Online)

三点，得出关于 a，b，c 的三元一次方程组

a+b+c=12 ①

4a+2b+c=25 ②

a-b+c=4 ③

由①—③得：2b=8

b=4 ④

④代入①得：a+4+c=12

a+c=8 ⑤

④代入②得：4a+8+c=25

4a+c=17 ⑥

由⑥ - ⑤得：3a=9

a=3 ⑦

⑦代入⑤得：c=5

a=3

b=4

c=5

∴所求二次函数解析式为 $y=3x^2+4x+5$

方法②另解方法：

$a=\frac{21}{3}-\frac{8}{2}=3$

$b=\frac{12-4-3(1-1)}{2}=4$

c=4-3-(-4)=5

∴所求二次函数解析式为 $y=3x^2+4x+5$

题目 3：如果一个二次函数图像经过（1,-2），（-1,8），（2,-4）三点求出这个二次函数的解析式。

方法①解方程组：

解：设所求二次函数图像为 $y=ax^2+bx+c$

由已知，函数图像经过（1,-2），（-1,8），（2,-4）三点，得出关于 a，b，c 的三元一次方程组

a+b+c=-2 ①

4a+2b+c=-4 ②

a-b+c=8 ③

由①—③得：2b=-10

b=-5 ④

④代入①得：a-5+c=-2

a+c=3 ⑤

④代入②得：4a-10+c=-4

4a+c=-6 ⑥

由⑥ - ⑤得：3a=3

a=1 ⑦

⑦代入⑤得：c=2

a=1

b=-5

c=2

∴所求二次函数解析式为 $y=x^2-5x+2$

方法②另解方法：

$a=\frac{12}{6}-\frac{2}{2}=1$

$b=\frac{-2+4-1(1-4)}{-1}=-5$

c=-4-4-(-5)*2=2

∴所求二次函数解析式为 $y=x^2-5x+2$

题目 4：如果一个二次函数图像经过（2,-2），（-2,8），（4,-1）三点求出这个二次函数的解析式。

方法①解方程组：

解：设所求二次函数图像为 $y=ax^2+bx+c$

由已知，函数图像经过（2,-2），（-2,8），（4,-1）三点，得出关于 a，b，c 的三元一次方程组

4a+2b+c=-2 ①

4a-2b+c=8 ②

16a+4b+c=-1 ③

由①—②得：4b=--10

$b=-\frac{5}{2}$ ④

④代入①得：4a-5+c=-2

4a+c=3 ⑤

④代入③得：16a-10+c=-1

16a+c=9 ⑥

由⑥ - ⑤得：12a=6

$a=\frac{1}{2}$ ⑦

⑦代入⑤得：c=1

$a=\frac{1}{2}$

$b=-\ -\frac{5}{2}$

c=1

∴所求二次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$

方法②另解方法：

$a=\frac{9}{24}-\frac{-1}{8}=\frac{1}{2}$

$b=\frac{-2+1-\frac{1}{2}(4-16)}{-2}=-\frac{5}{2}$

$c=-1-\frac{1}{2}*16+\frac{5}{2}*4=1$

∴所求二次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$

3. 解题过程中的注意事项

在人工使用另解方法解决此类问题时，由于坐标的数目至少三组（其中包含 3 个 x 坐标，3 个 y 坐标），因此在

将坐标代入到另解方法的公式中要注意坐标的准确代入，避免因坐标代入失误而造成一系列的连锁错误。

4 结束语：

根据一次函数的系数 (k) 可以直接用点坐标来计算，研究过程进一步构建三元一次方程组推导解出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中二次项系数 a，一次项系数 b 以及常数项 c。经过构建四组不同的二次函数验证另解方法的可行性，然后经过与解三元一次方程组对比可得另解方法优化了理论解法（体现在将解三元一次方程组的不确定性转化为数字之间的四则运算，降低了解该类题目的难度），而且增强了对数学知识的掌握与运用能力。

参考文献

[1] 林群编 . 数学七年级下册 [M]. 人民教育出版社：2012.10,103-106

[2] 林群编 . 数学八年级下册 [M]. 人民教育出版社：2013.9.86-98

[3] 林群编 . 数学九年级上册 [M]. 人民教育出版社：2014.3,28-40