

关于不定方程 $x^2+256=4y^n$ ($n=13, 15$) 的整数解

郑璐 王政 陈子涵 李泽坤

延安大学 陕西延安 716000

摘要: 在高斯整环中, 利用代数数论理论和同余理论的方法研究不定方程 $x^2+256=4y^n (x, y \in \mathbb{Z})$, 讨论当 $n=13, 15$ 时整数解的问题, 证明了 $x^2+256=4y^n$ 在 $n=13, 15$ 时无整数解.

关键词: 不定方程; 代数数论; 整数解

The integer solution on Diophantine equation $x^2+256=4y^n$ ($n=13, 15$)

Zheng Lu, Wang Zheng, Chen Zi Han, Li Ze Kun

Yan' an University, Yan' an 716000 Shaanxi, China

Abstract: In the Gauss domain, studies the diophantine equation $x^2+256=4y^n (x, y \in \mathbb{Z})$ based on algebraic number theory and congruence theory and congruence when $n=13, 15$ $x^2+256=4y^n$ have no integer solution.

Keywords: Diophantine equation; algebraic number theory; integer solution

不定方程是数论最古老的一个分支, 它有着悠久的历史与丰富的内容。所谓不定方程是指解的范围为整数、正整数、有理数或代数整数的方程或方程组, 其未知数的个数通常多于方程的个数。古希腊数学家丢番图早在公元3世纪初就开始研究过若干这类方程, 因此常称不定方程为丢番图方程。

设 $A, B \in \mathbb{N}$, A 无平方因子, 关于不定方程 $Ax^2+B=Cy^n, (x, y, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 解的问题是数论中的极其重要的问题, 用初等方法解决此问题比较困难, 近年来许多研究者用代数数论的方法研究这类不定方程, 取得了很好的结果。

当 $A=1, B=1, C=1$ 时, Ledesgue^[1]证明了无整数解; Nagell^[2]证明了当 $A=2, B=1, C=1, n=5$ 时仅有整数解 $(x, y)=(\pm 11, 3)$; 孙树东^[3]证明了 $A=1, B=64, C=1, n=7$ 时, 仅有整数解 $(x, y)=(\pm 8, 2)$; 尚旭^[4]证明了 $A=1, B=64, C=1, n=11$ 时无整数解; 尚旭^[5]证明了 $A=1, B=16, C=4, n=7, 11$ 时无整数解, 郑璐^[6]证明了 $A=1, B=256, C=4, n=7, 11$ 时在 $n=7$ 时仅有整数解 $(x, y)=(\pm 16, 2)$ 和 $n=11$ 时无整数解. 对于

$A=1, B=256, C=4, n=13, 15$ 的情况并未进行讨论说明, 因此利用代数数论理论和同余理论的方法研究不定方程 $x^2+256=4y^n$ 在 $n=13, 15$ 时无整数解.

一、预备知识^[7, 8]

设 M 是唯一分解整环, 正整数 $k \geq 2$, 以及 $\alpha, \beta \in M, (\alpha, \beta)=1$, 那么, 若 $\alpha\beta=\gamma^k, \gamma \in M$, 则有 $\alpha=\varepsilon_1\mu^k, \beta=\varepsilon_2\nu^k, \mu, \nu \in M$, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 M 中的单位元素, 并且 $\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon^k, \varepsilon$ 为单位元素.

二、主要结果与证明

定理1 不定方程

$$x^2+256=4y^{13}, x, y \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

无整数解.

证明: 分两种情况讨论

当 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中, (1) 式可以写为

$$(x+16i)(x-16i)=4y^{13}, x, y \in \mathbb{Z}$$

设 $\delta=(x+16i, x-16i)$, 由 $\delta|(2x, 32i)=2$ 得 δ 只能取 $1, 1+i, 2$.

因 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 有 $x+16i \equiv 1 \pmod{2}$, 所以 $\delta \neq 2$.

若 $\delta=1+i$, 则 $N(1+i)|N(x+16i)$, 即 $2|x^2+256$ 与 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 矛盾.

所以 $\delta=1$, 因而由引理可知, $x+16i=4(a+bi)^{13}$,

作者简介: 郑璐 (1995-) 男, 汉族、陕西咸阳、硕士、助教、研究方向: 数论、思想政治教育。

$x, a, b \in \mathbb{Z}$. 因此有

$$x = 4(a^{13} - 7811a^{11}b^2 + 715a^9b^4 - 1716a^7b^6 + 1287a^5b^8 - 286a^3b^{10} + 13ab^{12}) \quad (2)$$

$$16 = 4b(13a^{12} - 286a^{10}b^2 + 1287a^8b^4 - 1716a^6b^6 + 715a^4b^8 - 78a^2b^{10} + b^{12}) \quad (3)$$

因此 $b = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

当 $b = 1$ 时, 由 (3) 式可知

$$3 = 13(a^{12} - 22a^{10} + 99a^8 - 132a^6 + 55a^4 - 6a^2) \quad (4)$$

要 (4) 式成立, 需要 $13 \mid 3$, 显然不可能, 所以 $b \neq 1$.

当 $b = -1$ 时, 由 (3) 式可知

$$-5 = 13(a^{12} - 22a^{10} + 99a^8 - 132a^6 + 55a^4 - 6a^2) \quad (5)$$

要 (5) 式成立, 需要 $13 \mid -5$, 显然不可能, 所以 $b \neq -1$.

当 $b = 2$ 时, 由 (3) 式可知

$$2 - 2^{12} = 13(a^{12} - 22a^{10} \cdot 2^2 + 99a^8 \cdot 2^4 - 132a^6 \cdot 2^6 + 55a^4 \cdot 2^8 - 6a^2 \cdot 2^{10}) \quad (6)$$

要 (6) 式成立, 需要 $13 \mid 2 - 2^{12} = -4094$, 显然不可能, 所以 $b \neq 2$.

当 $b = -2$ 时, 由 (3) 式可知

$$-2 - 2^{12} = 13(a^{12} - 22a^{10} \cdot 2^2 + 99a^8 \cdot 2^4 - 132a^6 \cdot 2^6 + 55a^4 \cdot 2^8 - 6a^2 \cdot 2^{10}) \quad (7)$$

要 (7) 式成立, 需要 $13 \mid -2 - 2^{12} = -4098$, 显然不可能, 所以 $b \neq -2$.

当 $b = 4$ 时, 由 (3) 式可知

$$1 - 4^{12} = 13(a^{12} - 22a^{10} \cdot 4^2 + 99a^8 \cdot 4^4 - 132a^6 \cdot 4^6 + 55a^4 \cdot 4^8 - 6a^2 \cdot 4^{10})$$

$$129055 = a^2(a^{10} - 22a^8 \cdot 4^2 + 99a^6 \cdot 4^4 - 132a^4 \cdot 4^6 + 55a^2 \cdot 4^8 - 6 \cdot 4^{10}) \quad (8)$$

由于 $129055 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 17 \times 241$, 要 (8) 式成立, 则 $a^2 = 1, 9$.

当 $a^2 = 1$ 代入 (8) 式有

$$a^2(a^{10} - 22a^8 \cdot 4^2 + 99a^6 \cdot 4^4 - 132a^4 \cdot 4^6 + 55a^2 \cdot 4^8 - 6 \cdot 4^{10}) = -3202655 \neq 129055 \quad \text{因此 } a^2 = 1 \text{ 不成立.}$$

当 $a^2 = 9$ 代入 (8) 式有

$$a^2(a^{10} - 22a^8 \cdot 4^2 + 99a^6 \cdot 4^4 - 132a^4 \cdot 4^6 + 55a^2 \cdot 4^8 - 6 \cdot 4^{10}) \neq 129055$$

因此 $a^2 = 9$ 不成立.

所以 $b \neq 4$.

当 $b = -4$ 时, 由 (3) 式可知

$$-1 - 4^{12} = 13(a^{12} - 22a^{10} \cdot 4^2 + 99a^8 \cdot 4^4 - 132a^6 \cdot 4^6 + 55a^4 \cdot 4^8 - 6a^2 \cdot 4^{10}) \quad (9)$$

要 (9) 式成立, 需要 $13 \mid -1 - 4^{12} = -16777217$, 显然不可能, 所以 $b \neq -4$.

当 $x \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 可知 x 为偶数.

设 $x = 2x_1, x_1 \in \mathbb{Z}$. 代入 (1) 可得 $(2x_1)^2 + 256 = 4y^{13}$, 即

$$x_1^2 + 64 = y^{13}, x_1, y \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

形如 $x_1^2 + 64 = y^{13}, x_1, y \in \mathbb{Z}$ 形式的方程, 根据文献[3]的研究结果可知道此方程无整数解, 从而求得 $x^2 + 256 = 4y^{13}, x, y \in \mathbb{Z}$ 无整数解.

综上所述, $x^2 + 256 = 4y^{13}, x, y \in \mathbb{Z}$ 无整数解.

定理2 不定方程

$$x^2 + 256 = 4y^{15}, x, y \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

无整数解.

证明: 分两种情况讨论

当 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中, (11) 式可以写为

$$(x+16i)(x-16i) = 4y^{15}, x, y \in \mathbb{Z}$$

设 $\delta = (x+16i, x-16i)$, 由 $\delta \mid (2x, 32i) = 2$ 得 δ 只能取 $1, 1+i, 2$.

因 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 有 $x+16i \equiv 1 \pmod{2}$, 所以 $\delta \neq 2$.

若 $\delta = 1+i$, 则 $N(1+i) \mid N(x+16i)$, 即 $2 \mid x^2 + 256$ 与 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 矛盾.

所以 $\delta = 1$, 因而由引理可知, $x+16i = 4(a+bi)^{15}, x, a, b \in \mathbb{Z}$. 因此有

$$x = 4(a^{15} - 105a^{13}b^2 + 1365a^{11}b^4 - 5005a^9b^6 + 6345a^7b^8 - 3003a^5b^{10} + 455a^3b^{12} - 15ab^{14}) \quad (12)$$

$$16 = 4b(15a^{14} - 455a^{12}b^2 + 3003a^{10}b^4 - 6435a^8b^6 + 5005a^6b^8 - 1365a^4b^{10} + 105a^2b^{12} - b^{14}) \quad (13)$$

因此 $b = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

当 $b = 1$ 时, 由 (13) 式可知

$$5 = 15a^{14} - 455a^{12} + 3003a^{10} - 6435a^8 + 5005a^6 - 1365a^4 + 105a^2 \quad \text{即 } 5 = a^2(15a^{12} - 455a^{10} + 3003a^8 - 6435a^6 + 5005a^4 - 1365a^2 + 105) \quad (14)$$

要 (14) 式成立, 则 $a^2 = 1$. 此时 $15a^{12} - 455a^{10} + 3003a^8 - 6435a^6 + 5005a^4 - 1365a^2 + 105 = -127 \neq 5$

所以 $b \neq 1$.

当 $b = -1$ 时, 由 (13) 式可知

$$-3 = a^2(15a^{12} - 455a^{10} + 3003a^8 - 6435a^6 + 5005a^4 - 1365a^2 + 105) \quad (15)$$

要 (15) 式成立, 则 $a^2 = 1$. 此时

$$15a^{12} - 455a^{10} + 3003a^8 - 6435a^6 + 5005a^4 - 1365a^2 +$$

$$105 = -127 \neq -3$$

所以 $b \neq -1$.

当 $b = 2$ 时, 由 (13) 式可知

$$2 + 2^{14} = a^2(15a^{12} - 455a^{10} \cdot 2^2 + 3003a^8 \cdot 2^4 - 6435a^6 \cdot 2^6 + 5005a^4 \cdot 2^8 - 1365a^2 \cdot 2^{10} + 105 \cdot 2^{12}) \quad (16)$$

由于 $2 + 2^{14} = 16386 = 2 \times 3 \times 2731$, 所以要 (16) 成立, 则 $a^2 = 1$.

当 $a^2 = 1$ 时代入 (16) 式有

$$a^2(15a^{12} - 2455a^{10} \cdot 2^2 + 3003a^8 \cdot 2^4 - 6435a^6 \cdot 2^6 + 5005a^4 \cdot 2^8 - 1365a^2 \cdot 2^{10} + 105 \cdot 2^{12}) = -51997 \neq 16386.$$

因此 $a^2 = 1$ 不成立

所以 $b \neq 2$.

当 $b = -2$ 时, 由 (13) 式可知

$$2^{14} - 2 = a^2(15a^{12} - 455a^{10} \cdot 2^2 + 3003a^8 \cdot 2^4 - 6435a^6 \cdot 2^6 + 5005a^4 \cdot 2^8 - 1365a^2 \cdot 2^{10} + 105 \cdot 2^{12}) \quad (17)$$

由于 $2^{14} - 2 = 16382 = 2 \times 8191$, 所以要 (17) 成立, 则 $a^2 = 1$.

当 $a^2 = 1$ 时代入 (17) 式有

$$a^2(15a^{12} - 2455a^{10} \cdot 2^2 + 3003a^8 \cdot 2^4 - 6435a^6 \cdot 2^6 + 5005a^4 \cdot 2^8 - 1365a^2 \cdot 2^{10} + 105 \cdot 2^{12}) = -51997 \neq 16382.$$

因此 $a^2 = 1$ 不成立.

所以 $b \neq -2$.

当 $b = 4$ 时, 由 (13) 可知

$$4^{14} + 1 = a^2(15a^{12} - 455a^{10} \cdot 4^2 + 3003a^8 \cdot 4^4 - 6435a^6 \cdot 4^6 + 5005a^4 \cdot 4^8 - 1365a^2 \cdot 4^{10} + 105 \cdot 4^{12}) \quad (18)$$

由于 $4^{14} + 1 = 268435457 = 17 \times 15790321$, 所以要 (18) 成立, 则 $a^2 = 1$.

当 $a^2 = 1$ 时代入 (18) 式有

$$a^2(15a^{12} - 2455a^{10} \cdot 4^2 + 3003a^8 \cdot 4^4 - 6435a^6 \cdot 4^6 + 5005a^4 \cdot 4^8 - 1365a^2 \cdot 4^{10} + 105 \cdot 4^{12}) = 632712863 \neq 268435457.$$

因此 $a^2 = 1$ 不成立.

所以 $b \neq 4$.

当 $b = -4$ 时, 由 (13) 可知

$$4^{14} - 1 = a^2(15a^{12} - 455a^{10} \cdot 4^2 + 3003a^8 \cdot 4^4 - 6435a^6 \cdot 4^6 + 5005a^4 \cdot 4^8 - 1365a^2 \cdot 4^{10} + 105 \cdot 4^{12}) \quad (19)$$

由于 $4^{14} - 1 = 268435455 = 3 \times 5 \times 29 \times 43 \times 113 \times 127$, 所以要 (19) 成立, 则 $a^2 = 1$.

当 $a^2 = 1$ 时代入 (19) 式有

$$a^2(15a^{12} - 2455a^{10} \cdot 4^2 + 3003a^8 \cdot 4^4 - 6435a^6 \cdot 4^6 + 5005a^4 \cdot 4^8 - 1365a^2 \cdot 4^{10} + 105 \cdot 4^{12}) = 632712863 \neq 268435455.$$

因此 $a^2 = 1$ 不成立.

所以 $b \neq -4$.

所以当 $x \equiv 1(\text{mod } 2)$ 时, 不定方程 (11) 无整数解.

(2) 当 $x \equiv 0(\text{mod } 2)$ 时, 可知 x 为偶数.

$$\text{设 } x = 2x_2, x_2 \in \mathbb{Z}, \text{ 代入 (1) 可得 } (2x_2)^2 + 256 = 4y^{15}, \text{ 即} \\ x_2^2 + 64 = y^{15}, x_2, y \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

形如 $x_2^2 + 64 = y^{15}, x_2, y \in \mathbb{Z}$ 形式的方程, 根据文献[4]的研究结果可知道此方程无整数解, 从而求得 $x^2 + 256 = 4y^{15}, x, y \in \mathbb{Z}$ 无整数解.

综上所述, $x^2 + 256 = 4y^{15}, x, y \in \mathbb{Z}$ 无整数解.

三、结论

不定方程是数论方向的一个极其重要的问题, 在这方面的研究颇多, 本文就两个不定方程的整数解问题进行了讨论, 并给出了结论和证明, 今后希望进一步研究其他形式的不定方程.

参考文献:

- [1] LEBESGUE V A. Sur Limpossibilite en Nombre Entiers de Equation $x^m = y^2 + 1$ [J]. Nouvelle Annals of Mathematics, 1850, 9(1): 178-181.
- [2] NAGELL T. Sur Limpossibilite de Quelques Equations Deux Indeterminees [J]. Norsk Mætem Fornimings Skrefter Senel, 1921, 13(1): 65-82.
- [3] 孙树东. 不定方程 $x^2 + 64 = 4y^{13}$ 的整数解[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2015, 8(3): 78-80.
- [4] 尚旭. 关于不定方程 $x^2 + 4^n = y^{15} (n=1, 2, 3)$ 的整数解[J]. 渭南师范学院学报: 自然科学版, 2017, 32(8): 33-41.
- [5] 尚旭. 关于不定方程 $x^2 + 64 = 4y^n (n=7, 11)$ 的解[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2017, 34(4): 32-34.
- [6] 郑璐. 不定方程 $x^2 + 256 = 4y^n (n=7, 11)$ 的整数解[J]. 延安大学学报: 自然科学版, 2018, 37(1): 5-7.
- [7] 潘承洞, 潘承彪. 代数数论[M]. 山东: 山东大学出版社, 2004.
- [8] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980.