计算数字特征确定正态分布参数的教学探索

刘静静　徐雅静

（郑州轻工业大学数学与信息科学学院，河南 郑州 450000）

摘要：在概率论的学习中，正态分布是一个重要内容。本文结合教学中的体会，通过数字特征给出相互独立的正态分布的线性组合服从分布的一种计算方法和中心极限定理的一种改写形式。

关键词：方差；数学期望；正态分布

正态分布之所以应用极其广泛，除了因为它本身具有很好的性质，还有两个原因，一个是正态分布具有可加性，即独立同分布的正态分布的线性组合是仍是正态分布，另一个是中心极限定理，即在相当一般的条件下，大量随机变量的和近似服从正态分布。大部分学生对这两个结论比较熟悉，但是对结论中正态分布的参数，往往死记硬背，容易搞错，特别是对于非数学系的学生而言，使用较复杂的数学符号会增加结论运用的难度，从而降低运算的正确率.接下来，我们将对相互独立的服从正态分布的随机变量的线性组合服从的分布和中心极限定理给出一个更直观的计算方法 .

一、高校数学教学存在的主要问题

（一）学生学习兴趣不足

对于大学生来讲，很多大学生认为数学是一门基础课程，学习这门课程没有多大的必要，部分学生只是为了应付考试。尽管数学在所有大学课程之中也占有很高的比分，但是在学习数学的时候，很多细碎的知识使得学生望而却步。且高校的数学知识还非常抽象，难以理解，学生在学习的时候很难形成一整套完整的思维链。在此背景之下，需要教师及时转变教学方法与教学理念，并且教师还可以尝试使用多种多样的教学模式来进行教学，但是要尽可能符合学生的学习动机与学习规律，充分调动起来学生学习的主动性与积极性。如此便能最大限度地激发出来学生学习的欲望，还能充分调动起来学生学习的兴趣、积极性与主动性。

（二）教师教学观念传统

部分教师教学观念单一且传统，在实际开展教学的工作中，经常不知道该从哪个角度切入。因此，需要教师做的就是一定要深入了解数学的内涵，数学知识越广泛，那么传授给学生的数学知识就越多，同样学生的数学理论与实践能力也将得到显著的提升。很多时候，高校数学教学的模式依旧采用的是题海战术，教师尝试用灌输式的教学方法想要尽快完成教学目标，显然这种理念是片面的。基于此，要想最大限度地提升教学质量与教学效率，首先教师应该做的就是不断开创新的教学理念，将学生对数学知识的学习兴趣完全激发出来，进而促使学生喜欢上数学、爱上数学。

二、高校提升数学教学有效性的关键策略

（一）形成良好习惯

养成良好的学习习惯，是提升学习效率与学习质量的关键，同时还有助于锻炼学生的独立思考能力与学习能力。因此，教师在进行教学的过程之中，应着重引导学生养成良好的课前预习习惯与课后复习的习惯。相比于初等数学，高校数学的复杂程度更高，且更深奥，这时候课前预习就显得尤为重要。通过有规律且高质量的课前预习，学生便会在脑海之中形成对教学内容最基本的轮廓，当正式进入教学环节之后，学生的思路便可以跟上教师教学的进程，师生之间便会产生良好的互动、沟通与交流，对于教学质量与教学效率的提升都将产生至关重要的积极意义。

另外，虽然大学生的思想已经初具规模，但是还需要学生在课上认真听讲，有些问题在预习的时候已经有了大致的了解，有些学生仍处于比较模糊的状态。这时候，需要教师做的就是有的放矢，充分发挥出教师的主观能动性，引导学生将数学学习的积极性与主动性完全激发出来。同时还需要引导学生做好课堂笔记，尤其是针对一些数学重难点问题，例如典型反例、典型结论、典型例题等。

最后，和初等数学相比，由于大学要讲的高等数学知识内容繁多，且知识点较难理解，教师便需要引导学生养成自主课后复习的好习惯，同时，要多做练习题，更有助于学生知识点的掌握，也有助于学生对知识点的理解与巩固。当碰到一些较为棘手的数学问题时，教师与学生之间要保持良好的沟通交流，争取通过学生们之间的小组协同全力解决问题，最好能够达到举一反三的效果。

（二）改变教学方式

教师需要尽自己最大可能改变自身的教学方式，并且尽可能将现代化技术手段应用于高校数学的教学过程之中，如微课、慕课、翻转课堂等，进一步缓解学生的学习压力，同时还将为学生构建更为轻松、自在的课堂氛围与环境，为今后数学教学的有序开展奠定坚实的基础。

例如：在讲授与“随机变量及其分布”相关的内容时，教师可以引进思维导图的教学模式，如此，在直观且形象的思维导图的背景之下，学生将更直观理解随机变量极其分布的相关内容。一方面有利于学生更加深入的理解数学知识，并且强化学生对随机变量概念、随机变量分布函数的理解。另一方面将为构建高效数学课堂夯实基础，是提升教学效率的有效途径。由于大学生具有极强的好奇心，他们正好以此为机会去更加深入的探索与研究，如此教学效果将格外显著。

（三）注重课外辅导

除了在正式课堂之外，教师需要对典型数学案例与题目来进行更加确切的引导，帮助学生更顺利的消化知识，在课后，教师还应为学生布置一系列典型例题，来帮助学生更好地巩固教学内容。如果学生真正碰到了难以解决的问题时，逐渐地，学生将慢慢失去学习的动力。因此，在此背景之下，需要教师从以下几个方面着手：

其一，在课后，教师需要定期对学生进行有针对性的解答困惑，需要特别注意的是，教师不应该直接告诉学生答案，而更需要做的是提高学生在运算方面的解题能力，争取促使学生实现举一反三的目标，掌握数学的基本思想与基本解题思路。除此之外，还需要教师特别明确的是要及时且主动发现自己在教学过程之中的不足，尽最大可能提升自己的教学能力，并且及时调整授课计划，最终提升教学质量与教学效率。

其二，需要成立合作小组。合作小组可以以宿舍为单位，也可以教师划分。成立合作小组的核心目标为学生交流沟通学习方法，并且针对有难度的习题，可以共同商讨出来解决的方法，在互相帮助、互相借鉴过程之中，促进每位学生都能在自己的最近发展区获得最大限度的发展。同时，在课外小组活动的过程之中，

教师需要定期根据教学内容适当安排交流内容，并且基于问题引导学生更加深入的讨论，既能够有效且高效的解决相应的数学问题，而且通过小组合作交流学习，还能将学生学习的主观能动性充分发挥出来，更有助于学生创造性的显著激发。

（四）增加与学生的沟通交流

在新课程改革大力推行的背景之下，教学反思已经逐步趋向于完善，同样对于大学的教师来讲，教学反思的必要性与重要性是相当显著的。通过教学反思，教师能够进一步思考在教学的过程之中出现了怎样的问题，并且针对问题能够对今后的教学方案进行更有针对性的修改，同时还能根据教学过程之中存在的某些特殊情况进行详细的分析与处理。

例如，在教学活动正式开展之前，需要教师引导学生深入理解本次教学的目的、教学的实质性意义。在教学活动结束之后，需要教师进一步与学生沟通交流，切实了解到学生到底在学习方面有怎样的困惑，并且及时反思在教学过程之中出现了怎样的问题，是否有更加有效的解决方案等。其中，如果大部分学生的教学反馈不是很好，那么就需要教师从自身出发，进行深刻的教学反思。例如是不是教学设计方面出现了问题，还是教学方法使用不当，或是教学活动安排不够充分，不够全面，没有从高校学生的具体学情出发等。高效与及时的教学反思将有助于数学教学课堂质量与效率的全面提升。

三、计算正态分布的线性组合服从的分布举例

定理 1 若 X_1， X_2 ， $\cdots$ X_n 为相互独立的随机变量，且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ， $i=1,2,\cdots,n, C_1, C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个任意常数，则

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2\right), \qquad (1.1)$$

也就是说

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right),\ \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right)\right). \qquad (1.2)$$

证：由参考文献中 79 页的定理 3.1 可知（1.1）成立 . 另外，因为如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，那么 $E(X)=\mu$， $D(X)=\sigma^2$ ，所以（1.1）可以改写成（1.2）. 当然，我们也可以通过直接计算来得到（1.2）. 即

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(C_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(C_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2 .$$

定理 1 得证 .

注：（1.2）告诉我们，相互独立的服从正态分布的随机变量，它们的线性组合仍然服从正态分布，并且正态分布中的第一个参数就是这个线性组合的数学期望，第二个参数是它的方差 . 在实际的教学中我们发现，联合使用数学期望、方差的性质和（1.2）式来计算这类问题的正确率比直接使用（1.1）式要高一些 .

例：设 $X \sim N(1,2)$ ， $Y \sim N(-2,3)$ ，且 与 Y 相互独立，求 X+Y 和 X-2Y 服从的分布 .

方法 1：直接使用（1.1）式 .

$$X+Y \sim N(1-2,\ 2+3) = N(-1,5),$$

$$X-2Y \sim N(1-2\times(-2),\ 2+(-2)^2\times 3) = N(5,14) .$$

方法 2：使用（1.2）式，通过计算数学期望和方差得到分布 .

因为 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1-2=-1$， $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2+3=5$， 所以 $X+Y \sim N(-1,5)$. 同理，由 $E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=1-2\times(-2)=5$ 和 $D(X-2Y)=\mathrm{D}(X)+D(-2Y)=\mathrm{D}(X)+4D(Y)=2+4\times3=14$ 可得 $X-2Y \sim N(5,14)$.

继续使用定理 1 的思路，我们可以把参考文献中 124 页的独立同分布的中心极限定理进行如下改写 .

定理 2 设 X_1， X_2 ， $\cdots$ X_n 为相互独立，服从同一分布的随机变量序列，且 $E(X_i)$ 和 $D(X_i)>0$ 存在，那么当 n 充分大时，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right),\ \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right). \qquad (2.1)$$

证：由参考文献中的（5.7）式可知，如果 $E(X_i)=\mu$， $D(X_i)=\sigma^2$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu,\ n\sigma^2). \qquad (2.2)$$

直接计算可得

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu ,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2 .$$

所以（2.2）式可以改写为（2.1）. 定理 2 得证 .

注：这个定理告诉我们相互独立同分布的随机变量，如果它们的数学期望和方差都存在，那么它们的和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 在 n 充分大时肯定近似服从正态分布，并且第一个参数是这个和的数学期望 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$，第二个参数是这个和的方差 $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

例：设 X_1， X_2 ， $\cdots$ X_n 相互独立，且 $X_i \sim P(\lambda)$ ，那么由 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$ 和 $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$ 可知，当 n 充分大时， $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\lambda,\ n\lambda)$.

推论 1 设 X 服从参数为 n ， p $(0<p<1)$ 的二项分布，那么当 n 充分大时， $X \overset{\text{近似}}{\sim} N(np,\ np(1-p))$.

证：因为 $X \sim B(n,p)$ ，所以 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ，其中 X_i 服从参数为 p 的 0–1 分布，由

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X) = np$ 和 $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = D(X) = np(1-p)$ ，所以由定理 2 可知当 n 充分大时， $X \overset{\text{近似}}{\sim} N(np,\ np(1-p))$. 推论 1 得证 .

可以看到，虽然 X 近似服从正态分布，但是它的两个数字特征仍然是二项分布的数字特征，这将有助于结论的记忆。

四、小结

综上，我们可以得到独立同分布的正态随机变量序列的线性组合，或利用中心极限定理得到的结果，是正态分布或近似正态分布，而且两个参数分别是数学期望和方差，这样参数不需要死记硬背，可以利用期望和方差的性质，直接计算得到。特别是由定理 2 可知，概率分布可以近似，但数字特征不会改变。

参考文献：

[1] 万水森 . 高校数学教学中存在的问题及对策 [J]. 青春岁月，2019（33）：69.