条件极值的创新教学设计

杨维维[1]　刘树君[2]

（1. 南京工业大学数理科学学院数学系，江苏 南京 211816；
2. 南京财经大学应用数学学院，江苏 南京 212413）

摘要：本文主要研究条件极值问题的引入、求解、在经济管理问题上的应用，在教学过程中融入思政元素，做到教书育人的有机统一。本文旨在将数学理论与实际生活联系起来，做到学以致用，与学生思政课程中所学习的“思政元素”结合起来，将积极的价值观潜移默化的融入课堂。首先将条件极值的概念通过生活中常见的“易拉罐设计问题”引入，给出条件极值问题的解法——拉格朗日乘数法，并给出上述解法中拉格朗日乘数的经济学意义——影子价格，最后融盐于水，指出当下大家的约束条件即初心，目标函数即自己的人生价值，和学生共勉“不忘初心，砥砺前行”，在坚守初心这个约束条件下，为中华民族的伟大复兴努力奋斗。

关键词：条件极值；拉格朗日乘数法；影子价格

高等数学是大学数学的核心课程，是许多专业后续课程的重要学习基础，也是许多专业技术的重要知识工具。高等数学既是“打开科学大门的钥匙、思维的工具、自然科学的语言”，更是“工程技术新时代下的核心武器”。学好高等数学对高校学生来说意义重大，不仅要学好知识，也要学好应用。研究如何教好高等数学是高校老师的重要课题，高等数学中涵盖的知识面广，应用范围更广，涉及物理、天文、环境、通信、机械、材料、电子技术、化学、化工、交通、地理、军事、生命科学、社会学、医学、经济学等领域。高校教师要不断学习知识背景，不断研究知识应用。

条件极值是高等数学中的一个重要的内容，在经济学上有着重要的应用。多元函数条件极值问题是指带有约束条件的极值问题，其中自变量除了其定义域的要求外，还受到其他条件（如材料、经费等）的制约。目前，有大量学者在研究条件极值问题，比如关于其二阶充分性条件与一阶必要性条件的探讨与推广，比如从几何角度进行的教学研究，再比如条件极值的应用与拓展，等等。

2020 年 5 月 28 日，教育部印发《高等学校课程思政建设指导纲要》，明确指出全面推进课程思政建设是落实立德树人根本任务的战略，落实立德树人根本任务，必须把价值塑造、知识传授和能力培养融为一体。“课程思政就是通过高等学校课程建设和课堂教学来对大学生进行的思想政治教育。”德国教育家赫尔巴特认为：“教学如果没有进行道德教育，只是一种没有目的的手段，道德教育（或者品格教育）如果没有教学，就是一种失去手段的目的。”因此，我们的教学手段、教学理念需要不断创新，站在立德树人的角度，将“思政元素”融入课堂，让课堂不再枯燥，让学生增长见识，学有所用。

本文主要针对条件极值问题，从教学设计、实际应用和课堂思政几个方面进行创新，让课程学习变得丰富多彩。本文的教学设计以“全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务”为指导思想，以“问题驱动的数学教学理念”为主要教学手段，争取在教学中实现培养学生具备“用数学的眼光观察世界，用数学的思维分析世界，用数学的语言表达世界”的最终能力目标。本文首先利用易拉罐用料最省的问题引入条件极值的概念；其次利用启发式教学法，引导学生找到条件极值的求解方法，即拉格朗日乘数法；再次利用讲述法，讲述拉格朗日乘数在经济学上的意义，即影子价格；最后探讨课程中出现的“思政元素”。

一、问题的导入——易拉罐用料最省问题

首先回顾自由极值的定义，指出自由极值的概念来自于最有优化问题：人类的本性是贪婪的，最优化就是披在贪婪身上的一件漂亮的外衣。利用九峰山的图貌，形象地回顾极值的定义即可：在极大值点处领略“会当凌绝顶，一览众山小”，在极小值点出体会“四面苍峰翠岳，两旁岗峦耸立”的美景，鞍点即为“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”。

正如评优总是有条件的，在我们贪婪地追求最优目标时，总是要考虑各种现实条件的约束，以此引入易拉罐的设计问题：即在总体积固定的条件下，如何要用料最省？

设易拉罐高为 h，半径为 r，上下底的厚度为 d_1，侧壁厚度为 d_2，易拉罐的容积为 V，制作一个易拉罐所需材料的为 V_1。显然，易拉罐的容积为

$V=\pi r^2 h$，

这是问题必须要满足的条件，而目标是用料最省，用料即为上下底的体积与侧面体积之和，即

$V_1=2\pi r^2 d_1+2\pi rhd_2$，

像这种对自变量有附加条件约束的极值问题统称为条件极值。

二、问题的求解——拉格朗日乘数法

首先在实践的基础上从感性认识上升到理性认识，针对上述易拉罐最优设计问题，从问题的表象中抽象出其数学本质，给出条件极值的一般定义。

定义：条件极值的一般形式是在条件组 $\phi_k(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$，$k=1,2,\cdots m$，$(m<n)$ 的限制下，求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的极值。

其次给出求解条件极值的方法——拉格朗日乘数法。在条件极值问题中，目标函数的最优值和约束条件的限制事实上是一对矛盾的两个方面，在问题的提法中我们看到的是矛盾双方对立的性，而在解决问题时需要用到矛盾双方的统一性：即将约束条件融入到目标函数中。

设目标函数为 $z=f(x,y)$，约束条件为 $\phi(x,y)=0$。

引入辅助函数 $L(x,y,\lambda)$ 将上述条件极值问题转化为自由极值问题。

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$，从而在点 (x_0,y_0,λ_0) 处满足 $L(x,y,\lambda)$ 取极值的必要条件为 $\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\phi_x(x,y)=0, \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\phi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda=\phi(x,y)=0, \end{cases}$

其中 $L(x,y,\lambda)$ 为拉格朗日函数，λ 为拉格朗日乘数。

求解用料最省问题：目标函数为 $V=\pi r^2 h$，约束条件为 $V_1=2\pi r^2 d_1+2\pi rhd_2$，这里我们令 $d_1=2d_2=d$。构造拉格朗日函数 $L(r,h,\lambda)=V_1+\lambda(V-\pi r^2 h)=4\pi r^2 d+2\pi rhd+\lambda(V-\pi r^2 h)$，

求解方程组 $\begin{cases} L'_r = 8\pi rd + 2\pi hd - 2\pi rh\lambda = 0, \\ L'_h = 2\pi rd - \lambda\pi r^2 = 0, \\ L'_\lambda = V - \pi r^2 h = 0, \end{cases}$

得到最优解 $\begin{cases} r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}, \\ h = 4\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}. \end{cases}$

我们将刚刚得到的数学理论应用到实践中，指导实践并接受实践的检验，即利用上述拉格朗日乘数法求解开头提出的易拉罐最优设计问题，得到易拉罐的半径与高知比为 1：4 时用料最省，此时可以拿出易拉罐请同学们观察一下，确实与事实相符。

三、问题的应用——影子价格

拉格朗日乘数在经济学上有很重要的意义，产出最大化时得拉格朗日乘数 λ_0 正是资源总量对最大产出量的边际贡献，在经济学上称为产出最大化时资源的影子价格。

设总产出 u 是投入要素 x,y 的二元函数 $u=f(x,y)$, 在资源总量为 a 的约束条件 $\varphi(x,y)=a$ 下，求最大产出量。

构造拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[a-\phi(x,y)]$,

则产出最大的必要条件为

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y)+\lambda\phi_x(x,y)=0, \\ L_y = f_y(x,y)+\lambda\phi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda = a-\phi(x,y)=0, \end{cases}$$

问题的最优解 $x_0=x_0(a), y_0=y_0(a), \lambda_0=\lambda_0(a)$ 是关于 a 的函数，则最优值 $u_0=f(x_0,y_0)$ 也是关于 a 的函数。u_0 相对于 a 的边际函数 $\dfrac{du_0}{da}=f_x(x_0,y_0)\dfrac{dx_0}{da}+f_y(x_0,y_0)\dfrac{dy_0}{da}$

$$=\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)\frac{dx_0}{da}+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)\frac{dy_0}{da}$$

$$=\lambda_0[\varphi_x(x_0,y_0)\frac{dx_0}{da}+\varphi_y(x_0,y_0)\frac{dy_0}{da}],$$

在约束条件 $\varphi(x,y)=a$ 两边对 a 求导，得

$$\varphi_x(x_0,y_0)\frac{dx_0}{da}+\varphi_y(x_0,y_0)\frac{dy_0}{da}=1,$$

从而 $\dfrac{du_0}{da}=\lambda_0$。

产出最大化时得拉格朗日乘数 λ_0 正是资源总量 a 对最大产出量 u_0 的边际贡献，在经济学上称为产出最大化时资源的影子价格。此时的资源投入如果再增加一个单位，将能够带来 λ_0 个单位的追加效益。所以，拉格朗日乘数是具有明确的经济学意义的。影子价格实际上是资源投入某项生产活动的潜在边际效益，它反映了产品的供求情况和资源的稀缺程度，而且资源的数量、产品的价格都影响着影子价格的大小。一般来说，资源越丰富，其影子价格就越低，反之亦然。所以，企业的管理者在进行科学决策的时候，影子价格是必须考虑的一个重要依据。

从不同角度看问题，给学生讲述影子价格，让学生更全面的了解拉格朗日乘数法。

四、思政元素切入

本文在知识点回顾时，用我国的文化瑰宝——古诗词形象地描述了极值点与鞍点，这一过程融入的思政元素是弘扬我国的传统文化，增强学生的民族自信感。再比如我国古代数学家祖冲之、刘徽等，他们在数学上的造诣是遥遥领先于世界的，这些都体现了我国传统文化的伟大，激发学生的爱国情怀。

问题导入时引用了易拉罐用料最省的问题，体现数学来源于生活，问题求解时，又体现了数学应用于生活。易拉罐的形状与圆柱体非常接近，那么易拉罐用料最省的问题是不是可以近似于圆柱体表面积最小的问题呢？如果是，那么得到的结果是半径与高之比为 1：2，但实际上不是的。通过观察，不难发现，易拉罐的侧面与底面厚度不同，如果将厚度考虑进去，就会得到半径与高之比为 1：4 的结果，是符合实际的。通过易拉罐用料最省的问题，我们学习到看问题要全面，不能片面，不能只知其一，不知其二，只见树木，不见森林。这样看问题，按毛泽东同志的说法，没有不出乱子的。因此，我们要从实际出发，透过现象看本质，真正做到用数学知识解决实际问题。

问题应用时，介绍了影子价格，是在经济学上了应用，也是对拉格朗日乘数法的一个升华。习近平总书记在北京大学师生座谈会上强调："教育兴则国家兴、教育强则国家强。高等教育是一个国家发展水平和发展潜力的重要标志"。这里的升华也是希望增强我们的教育，拉格朗日乘数，不只是一个简单的数学概念，甚至可以影响到企业的决策。

最后，将条件极值折射出的人生哲理融入课堂，要"不忘初心，砥砺前行"。

五、结语

同学们正值青春之年，未来有无限可能。当下大家的目标函数即为最大化地追求自己的人生价值，约束条件即为自己的初心。在追求人生价值的过程中不能将初心和目标对立起来，而是要将初心这个约束条件融入到自己实现人生价值的进程中。用习近平总书记的一句话和大家共勉：不忘初心，砥砺前行。

参考文献：

[1] 钟天琦，孙小军，邢田宇 . 大一新生高等数学学习现状分析与对策 [J]. 首都师范大学学报（自然科学版），2020，41（3）：52-57.

[2] 施庆生，马树建等 . 高等数学：下册 [M]. 北京：科学出版社，2019：147-154

[3] 赵坚，高夯 . 关于极值点的必要条件 [J]. 东北师大学报（自然科学版），2010，42（4）：1-5.

[4] 马玉明，宁荣健 . 多元函数条件极值的充分性讨论 [J]. 大学数学，2012，28（2）：139-142.

[5] 颜超，陈涛 . 拉格朗日乘数法的几何理解 [J]. 高等数学研究，2017，20（2）：15-16，19.

[6] 赵宇，黄金莹，王希圆 . 数学分析中的条件极值问题 [J]. 大学数学，2013，29（2）：102-106.

[7] 刘建军 . 课程思政：内涵、特点与路径 [J]. 教育研究，2020（9）：28-33.

[8] 杨桂元，李天胜 . 数学建模入门：125 个有趣的经济管理问题 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2013.

[基金项目] 江苏省高校自然基金面上项目 (22KJB110017)；

南京工业大学校教改项目：《高等数学》课程思政的研究与实践；

南京工业大学研究生教学创新项目：案例教学法在研究生最优化课程中的应用研究 .

作者简介：杨维维（1987-），女，博士，讲师，主要从事最优化方法与理论的研究。

通讯作者：刘树君（1991-），男，博士，讲师，主要从事偏微分方程的研究。