

截长补短何必东寻西找，选准例题一道就好

张洪斌 毛雷波

(重庆市长寿中学校, 重庆 401220)

摘要: 我们平时在做题时, 不仅要对题目进行足够的分析, 而且有时候也要对题目进行适当的修剪, 整理出基本模型。通过对模型进行多角度分析, 整理出求解一般问题的求解思路, 及时总结思想方法, 在教学中, 提高学生的解题能力, 发展学生的“四能”。

关键词: 数学模型; 截长补短; 解题能力

一、原题呈现

$\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上, 且 $BD=CE$ 。

如图 1, FH 为 $\angle AFC$ 的角平分线, FH 和 AC 相交于点 M , 连接 HA 、 HC , 若 $\angle AHC + \angle AFC = 180^\circ$, 求证: $AF+CF=FH$;

如图 2, 在 (1) 的条件下, 延长 AF 交 HC 的延长线于点 K , 点 G 在线段 AH 上, 且 $GH=CK$, 连接 CG 交 FH 于点 N , $FN=3$, $AK=8$, 求 FH 的长。

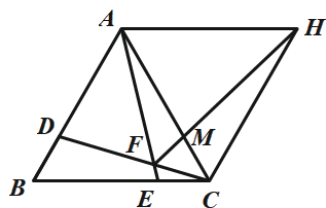


图1

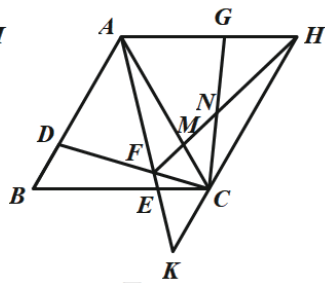


图2

二、剥离模型

在八年级上册期中考试时, 我们选择了这样一道题, 看起来简单, 但是第 (1) 问着实难倒了不少学生。

我们可以证明 $\triangle ACH$ 为等边三角形, 如果题目改为直接告知 $\triangle ACH$ 为等边三角形, 那这道题就成了一道可以帮助学生理解截长补短这种构造辅助线方法的一道好题。

已知: 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, AC 与 BD 相交于点 O , 且 $\triangle ACD$ 为等边三角形。

求证: $BD=AB+BC$ 。

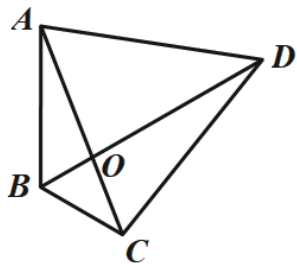


图3

三、思路分析

通过观察结论我们发现, 这是一道需要用截长补短方法来构造辅助线求解的题目。但是通过分析我们发现, 由于这道题目条件设定的特殊性, 使得我们无论使用截长法还是补短法构造辅助线, 这道题都可以证明出来, 而且在截长或者补短时, 无论在长线段的哪头截取, 也无论在短线段的哪头补短, 都能得出全等三角形和等边三角形, 得出结论。

思路一: 将 BC 补在 AB 上

方法一: 延长 AB 至点 E , 使得 $BE=BC$, 连接 CE , 如图 4。

容易得出 $\triangle BCE$ 为等边三角形, 从而得出 $\angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$, 因此 $\angle ACE = \angle DCB$, 证得 $\triangle DCB \cong \triangle ACE$ (SAS), 所以 $BD=AE=AB+BE=AB+BC$. 得证。

方法二: 延长 AB 至点 E , 使得 $AE=DB$, 连接 CE , 如图 4。

容易证出 $\triangle DCB \cong \triangle ACE$ (SAS), 从而得出 $BC=CE$, 再加上 $\angle CBE=60^\circ$, 得出 $\triangle BCE$ 为等边三角形, 因此 $BE=BC$, 所以 $BD=AE=AB+BE=AB+BC$. 得证。

方法三: 延长 BA 至点 E , 使得 $AE=BC$, 连接 DE , 如图 5。

容易证出 $\triangle DCB \cong \triangle DAE$ (SAS), 从而得出 $DE=DB$, 再加上 $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$, 得出 $\triangle BDE$ 为等边三角形, 所以 $BD=BE=AB+AE=AB+BC$. 得证。

方法四: 延长 BA 至点 E , 使得 $BE=BD$, 连接 DE , 如图 5。

容易得出 $\triangle BDE$ 为等边三角形, 从而得出 $\angle EDB = \angle ADC = 60^\circ$, 因此 $\angle EDA = \angle BDC$, 证得 $\triangle DCB \cong \triangle DAE$ (SAS), 因此 $AE=BC$, 所以 $BD=BE=AB+AE=AB+BC$. 得证。

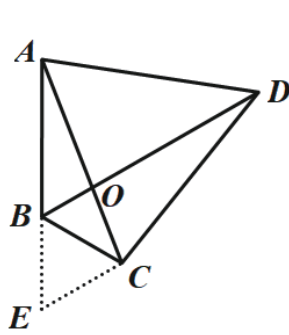


图4

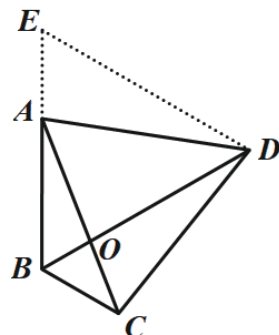


图5

思路二：将 AB 补在 BC 上

方法五：延长 CB 至点 E ，使得 $BE=AB$ ，连接 AE ，如图 6。

容易得出 $\triangle BAE$ 为等边三角形，从而得出 $\angle BAE = \angle CAD = 60^\circ$ ，因此 $\angle CAE = \angle DAB$ ，证得 $\triangle DAB \cong \triangle CAE$ (SAS)，所以 $BD=CE=BE+BC=AB+BC$ 。得证。

方法六：延长 CB 至点 E ，使得 $CE=BD$ ，连接 AE ，如图 6。

容易证出 $\triangle DAB \cong \triangle CAE$ (SAS)，从而得出 $AE=AB$ ，再加上 $\angle ABE=60^\circ$ ，得出 $\triangle BAE$ 为等边三角形，因此 $BE=BA$ ，所以 $BD=CE=BE+BC=AB+BC$ 。得证。

方法七：延长 BC 至点 E ，使得 $CE=AB$ ，连接 DE ，如图 7。

容易证出 $\triangle DCE \cong \triangle DAB$ (SAS)，从而得出 $DE=DB$ ，再加上 $\angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ，得出 $\triangle BDE$ 为等边三角形，所以 $BD=BE=CE+BC=AB+BC$ 。得证。

方法八：延长 BC 至点 E ，使得 $BE=BD$ ，连接 DE ，如图 7。

容易得出 $\triangle BDE$ 为等边三角形，从而得出 $\angle EDB = \angle ADC = 60^\circ$ ，因此 $\angle EDC = \angle BDA$ ，证得 $\triangle DCE \cong \triangle DAB$ (SAS)，因此 $CE=AB$ ，所以 $BD=BE=CE+BC=AB+BC$ 。得证。

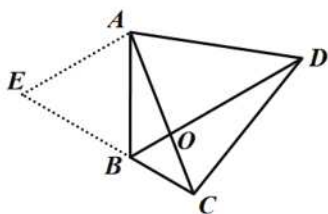


图 6

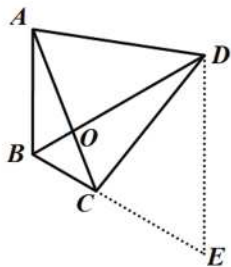


图 7

思路三：在 BD 上截长

方法九：在 BD 上截取 $BE=BC$ ，连接 CE ，如图 8。

容易得出 $\triangle BCE$ 为等边三角形，从而得出 $\angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$ ，因此 $\angle DCE = \angle ACB$ ，证得 $\triangle DCE \cong \triangle ACB$ (SAS)，因此 $DE=AB$ ，所以 $BD=DE+BE=AB+BC$ 。得证。

方法十：在 BD 上截取 $DE=AB$ ，连接 CE ，如图 8。

容易证出 $\triangle DCE \cong \triangle ACB$ (SAS)，从而得出 $CE=CB$ ，再加上 $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ，得出 $\triangle BCE$ 为等边三角形，所以 $BD=DE+BE=AB+BC$ 。得证。

方法十一：在 BD 上截取 $BE=BA$ ，连接 AE ，如图 9。

容易得出 $\triangle BAE$ 为等边三角形，从而得出 $\angle BAE = \angle CAD = 60^\circ$ ，因此 $\angle DAE = \angle CAB$ ，证得 $\triangle DAE \cong \triangle CAB$ (SAS)，因此 $DE=CB$ ，所以 $BD=BE+DE=AB+BC$ 。得证。

方法十二：在 BD 上截取 $DE=BC$ ，连接 AE ，如图 9。

容易证出 $\triangle DAE \cong \triangle CAB$ (SAS)，从而得出 $AE=AB$ ，再加上 $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ，得出 $\triangle BAE$ 为等边三角形，因此 $BE=BA$ ，所以 $BD=BE+DE=AB+BC$ 。得证。

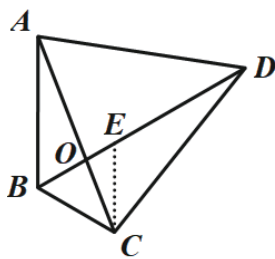


图 8

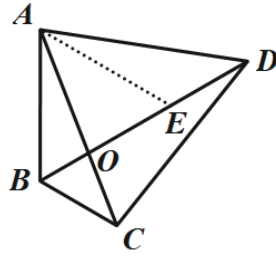


图 9

思路四：其他证明思路

方法十三：（利用角平分线的性质构造辅助线）分别过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，如图 10。

根据角平分线的性质得出 $DE=DF$ ，从而证出 $\triangle DAE \cong \triangle DCF$ (HL)，因此 $AE=CF$ ，也容易证得 $\triangle DBE \cong \triangle DBF$ (HL)，因此 $BE=BF$ ，因为 $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ，所以 $BD=2BF=BE+CF+BC=BE+AE+BC=AB+BC$ 。得证。

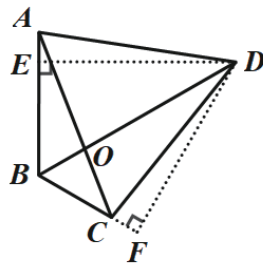


图 10

四、小结提升

截长补短这种辅助线的构造方式，对于初接触全等三角形添加辅助线的同学来说，并不容易。但是我们所给出的这道题目，在原题基础上进行修剪，加上了等边三角形、角平分线等特殊条件，所以这道题变得容易证明，而且对于初学者来说，只要弄清了截长补短的原理，只要愿意尝试，在每个方向上都会有不同的收获。老师们在平时的教学中，需要多对基础题型进行总结，通过对模型进行多角度分析，整理出求解一般问题的求解思路，及时总结思想方法，在教学中，提高学生的解题能力，促进学生“四能”的发展。

参考文献：

[1] 李景财. 类比截长补短 实现一题妙解 [J]. 中学数学教学参考：中旬，2016 (3)：2.