

关于新高考背景下高中数学排列组合解题技巧的研究

张鹏宇

(拉萨中学, 西藏 拉萨 850000)

摘要: 排列组合这部分内容的抽象性强, 而本节知识又是高考的核心考点之一, 新高考改革后, 数学科目考试内容更为灵活, 对于学生的基础知识功底、思维逻辑能力要求更高。掌握排列组合知识规律的学生认为这部分内容比较简单, 而思维转化能力弱的学生则认为这部分知识具有较高难度。因此, 研究高中数学的排列组合题型技巧, 有针对性地训练学生的思维转化能力, 帮助学生高效解题十分关键。本文分析了高中数学排列组合部分的几种解题技巧, 并探讨了新高考背景下高中数学排列组合部分教学方法, 希望为这部分内容的教学质量提供有力支持。

关键词: 新高考; 高中数学; 排列组合; 解题技巧

排列组合问题考察学生的逻辑思维能力, 要求学生基于概念公式、计算原理分析数列排列组合规律, 在一定解题方法以及解题技巧的帮助下解答题目。教师有必要研究新高考对排列组合内容的考察要求、考察规律, 总结排列组合解题方法, 帮助学生有效地应对高考。解答排列组合问题, 最关键、最首要的步骤在于审清题意, 不可盲目套用公式, 以免掉入命题者的命题陷阱。排列组合的基础知识看似简单, 但越深入地学习就会发现其越抽象, 许多同学的思维转化能力较差, 解答起来就有难度, 因此需要去寻找解题技巧, 将思维问题难度弱化。在解答排列组合问题时可以应用一些简单的技巧。

一、新高考背景下数学排列组合解题技巧的策略

(一) 分步乘法计数法解题技巧

分步乘法计数原理主要应用于解决排列问题, 其思路是计算完成一件事情总共需要的步骤。解题思路是首先假设有 n 个步骤, 此方法是完成第一个步骤的所有方法, 而此方法是完成第二个步骤的所有方法, 完成所有步骤也就是总共有 n 种方法。因此, 最后要完成这件事总共需要 $N = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ 种方法。应用分布乘法技术原理, 首先要理清前后顺序, 每一个步骤都不能缺失。其次, 每个步骤之间都是相互独立的, 互相不受影响, 每步所采取方式不同, 所以不会得到整体的一个相同方式。

例1: 当前, 信息安全已经成为全社会关注的重点问题, 设置密码是方式信息泄露的重要方式之一。密码学就应用到了排列组合原理。密码通常6位数字起步, 那么我们分析一下密码的安全性到底有多大?

解析: 以6位数密码为例, 这6位数字中的每一个数字可以是0~9的任意一个数, 那也就是说, 每一位数字位置上都有10种可能, 那么6位数密码也就是有 $10^6=100$ 万种可能性, 随机选择一次得到正确密码的概率为一百万分之一, 可以说, 六位数密码是比较保险的。

(二) 插空法解题技巧

插空法主要应用于存在不相邻或不连续情况的题型, 其应用步骤为: 找到可以邻近的元素以及可以不邻近的元素, 随后将可以邻近的元素进行排列, 再从这些可以邻近的元素中找到空隙。比如, 5个元素就有6个空, 在这些空隙里面再插入可以邻近的元素, 就可以满足不邻近的情况了, 再用分步乘法计数原理得出答案。

例3: 我国机动车车牌采用省市简称+城市字母+其他5个字符。其他5个字符共分为两种情况, 一种是全数字, 另一种是字母和数字, 但字母不超过两位, 同时因为I和1, O与0很像, 为了避免造成误会, 所以I和O这2个字母不被允许出现在车牌上。数字也就是有0~9, 字母也就是A~Z, 那么这样组合可以组合

多少个车牌呢?

解析: 5个字符中, 既可能有字母, 也可能有数字, 但字母不超过2个, 同时为了保证I和O不出现, 那么也就是说26个英文字母中有24个英文字母和10个数字可以出现在车牌上, 可分为3种情况来思考: ①从00000到99999, 根据常识性知识, 共计是10万个车牌号。②1个英文字母+数字车牌, 可以将除1个字母以外的数字分成4组, 有5个空隙, 所以1个字母和4个数字可以有 $24 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 120$ 万个车牌。③2个英文字母+数字车牌, 可以类比于上面的解法, 将3个数和1个英文分成4组, 就会产生5个空隙, 又因为有2个英文字母, 所以2个字母和3个数字就有 $24 \times 24 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 = 576$ 万个车牌。综上, 一个地区共计有 $10+120+576=706$ 万个车牌。

(三) 隔板法解题技巧

隔板法是指 m 个隔板插入 n 个元素, 将 n 个元素进行分组, 分成 $m+1$ 组, 然后进行全排列。使用隔板法要注意以下三个问题: n 个元素不能相同; 所分成的组中最少要有1个元素; 组与组之间不能相同。

例5: 将5个毛绒玩具进行收纳, 总共有3个盒子里, 随机收纳到每一个盒子里, 请问每个盒子里都有毛绒玩具的情况有多少种?

解析: 这个问题是不相邻问题, 可以用隔板法进行解答。首先列出3个部分, 再在这3个部分中放5个毛绒玩具, 且每份都为空。在这里, 用2个隔板, 也就是将5个包容玩具放在了同一列, 每个盒子都要求有玩具, 所以在这4个空中插入2个隔板。由此可见, 每形成1种插空法, 就有与此相对应的1个方案, 则有 $=6$ 种方案。

例6: 将5个毛绒玩具进行收纳, 总共有3个盒子里, 随机收纳到每一个盒子里, 请问有多少种分配方案?

解析: 将这个问题与例5比较, 之前的要求是3个盒子都必须有毛绒玩具。而在这个问题中, 有的盒子可以没有毛绒玩具, 如果这样, 则需要根据两种情况解题。一种情况就是2个隔板相邻, 另一种情况就是2个隔板不相邻。这就需要数学思想方法中的分类讨论的思想方法, 分别求出这两种情况的全排列再分别相加, 即为所求。在这里, 问题中给了5个毛绒玩具, 还可以拓展到 n 个玩具, 对题目进一步拓展, 隔板法是解决问题的一个有效解题思路。

不相邻问题应用隔板法可以较好地解决题目, 但是伴随着题型的变化, 题型越来越复杂, 隔板法的应用也会变得越来越复杂、越来越不易理解。这就要求学生们养成良好的思维能力和想象能力, 在教学过程中, 教师也应当有针对性地培养学生的思维, 让学生熟悉隔板法, 掌握隔板法的应用方法。

（四）捆绑法解题技巧

捆绑法主要应用于解决相邻位置的题型，包括相邻排列、相连排列、连续排列等，就应该运用捆绑法，其应用步骤为：首先将邻近元素看成一个新元素，或将其看成一个整体；其次让这个“新元素”参与排列，最后用分步乘法计数原理分析可能性。

例2：元旦晚会上共安排了10个节目，其中6个节目为演唱和跳舞节目，其余4个节目为小品类表演，为了保证晚会的收视率，导演要求将小品类节目安排在一起，应该如何安排呢？

解析：因为要求小品类节目安排在一起，所以可以将小品类节目暂时看作1个整体，之后先排列唱跳类节目，可以发现共有 $=5040$ 种排列方式；再排列4个小品类节目，小品类节目共有 $=24$ 种排列方式，将两个数相乘即为所有排列方式。

（五）间接法解题技巧

排列组合中也有逆向思维解决问题，主要应用于从题目中无法找到所有可能的排列情况，往往是因为题干中信息不全，所以可以从其反面情况入手，得到所有反面情况，再用所有可能性减去所有反面情况，即为所有可能情况。

例4：在某产品的品控环节收到了9个产品，已知这9个产品中一共有4个次品和5个正品，从中选出3个产品进行检验，请问至少有1个是次品的情况有多少种？

解析：假设从正面思维分析，至少有1个是次品的情况包括有1个次品、2个次品、3个次品的情况。1个次品，2个正品： $=40$ 种 2个次品，1个正品： $=30$ 种 3个次品，0个正品： $=4$ 种 既然进行分类，结果即为所求数的和： $40+30+4=74$ 种。

如果用逆向思维，至少有1个是次品的反面是1个次品也没有。0个次品： $=10$ 种 总的方法为从9个产品中选出3个产品： $=84$ 种。所以问题可以理解为正面方法数=总的方法数-对立面方法 $=84-10=74$ 种 综上，结果都是一致的。间接法可以简便运算，也能得到正确结果。

二、新高考背景下数学排列组合解题教学策略

（一）深化学生对于概念的理解

新教材调整了教学内容的顺序，加强认识结构层次性，先学习概念及符号表示，其次是方法分布和分类计算原理，对于高中生应按照认知心理学家加涅认为的由简单到复杂的学习和练习形成良好的认知结构。解答排列组合题目，首先要理解相关概念。因此，在这部分知识教学过程中，首先要做好排列组合相关概念的讲解。为帮助学生理解有关概念，教师可联系实际生活的相关情境，将生活问题与排列组合知识进行融合。如：“某个长途汽车从起点出发，到达目的地经过许多站，研究中间站点的规律”。联系生活情境理解排列组合的相关概念，有助于学生深化对于排列组合的理解。理解概念的关键在于对易混淆问题进行辨析，例如理解“排列”和“组合”两者的区别，从定义、公式等方面对这两个概念进行解析。概念理解不清晰是影响学生解题的一个重要因素，概念解析是高中数学学习的基础，也是重点，教师有必要结合排列组合知识点的规律，选择合适的方法讲解基础概念。

（二）注重训练学生的思维

掌握排列组合知识、解答排列组合问题，不仅要求学生正确地理解有关概念，还要求学生具备良好的思维能力。在本章节课程教学中，教师应当有意识的引导学生的思维，训练学生解答这部分知识的思维。在解题时，学生思考“为何要这么做”“怎样做满足题意”“这样分类是否完整？”经过训练，学生对这部分题型形成一定的解题思维规律，及时准确地找到有关解题思维，分析不同题型的特点、规律。由于排列组合题属于思维组合，这种

题型一般和现实生活有着密切地关联，因此，研究通过具体的案例将排列组合规律清晰呈现是教师需要思考的重要问题。教师可以生活化问题抽象成排列组合式的数学模型，让学生发现排列组合的相关规律。在整个教学过程中，教师应当鼓励学生自己去发现，自己去思考，自己找到最好的解决办法，这样不但激发了学生学习的积极性，激活了学生的思维，还让学生最大限度地参与到了探索新知识的教学过程中，培养学生的创新思维。

（三）开展科学化专题训练

排列组合类题型灵活多变，但也存在着基本的解题套路和规律。掌握这些解题套路和规律是提高解题速度、解题准确率的重要手段。对排列组合题型进行分类，可以分为分类与分步两类，其中分类题型的解题规律在于应用分类计数原理，分步题型的解题规律在于应用分步计数原理，即特殊元素和特殊位置的问题。这两类题型都围绕元素展开，通过对元素具体位置、具体类型展开分析，找到本部门题型的规律。如元素相邻的问题通常利用捆绑法分析，也就是将元素看作整体开展排列；相离问题通常先从其他元素入手。正难则反、定序问题等也是排列组合常见的题型之一。题型练习是数学学习的必要环节，在讲完相关解题技巧后，需要进行大量针对性的问题，进行知识的巩固和查漏补缺，让学生通过题型练习内化、吸收课程知识，培养独立分析问题的能力，以及对题型灵活应变能力。比如插空法和捆绑法在有些习题中容易搞混，学生在没有注意问题细节的情况下错误的使用方法最终得到错误的答案。

（四）一题多解训练学生的思维

排列组合题型的一大特点就是题型多样、解答灵活，对于一道题目的解法往往不唯一。多样化的解法是对学生逻辑思维能力的一种有效锻炼，但是有时候教师为了加快教学进度，在课堂上会选择最常用的一种方法进行讲解。在解题过程中出现思维定势、思维僵化也是导致学生出错的重要原因，而“一题多解”训练更有助于学生养成灵活的思维，更多元、更深刻地审视排列组合题型。在这章节学习中，教师可以通过“一题多解”训练来促进学生的思维能力的发展，科学引领学生用分类讨论的思考、从不同视角解决问题，帮助学生拓展数学思维，提高他们解决数学问题的能力。一题多解使得学生认真审视题目的内在规律，分析题型和对应解法，对于强化学生对排列组合知识点的理解、掌握解题技巧、提高解题效率都有重要作用。经常性开展一题多解训练，能够使学生在考场上灵活应对，增强学生面对此类型题目的信心。

三、结语

排列组合是高中数学的重点内容，也是高考的必考内容，这部分内容在社会生活中应用广泛，在计算机编程、软件研发、网络布局等领域都有应用，因此掌握这部分内容很重要。本文分析了排列组合问题的几种典型解题方法，同时讨论了在排列组合问题上，教师应当采取的教学策略、关注的教学重点。排列组合题型的变化比较多样，解题方法也多样化，只有让学生熟练掌握本章节知识，并且熟悉每一种解题技巧的应用，才能使他们在考场上迅速找到合适的解题方法，拓展思维并灵活运用以解决相应问题，不断积累总结，从而提高解题效率。

参考文献：

- [1] 郑义. 高中排列组合教学策略[J]. 湖北教育(教育教学), 2020(12): 73-74.
- [2] 刘宗亮. 高中数学“排列组合”应用问题及其优化措施[J]. 理科爱好者(教育教学), 2020(03): 82+84.