初中数学反证法的应用探究

黄万泽
（南宁市良庆区良庆初级中学，广西 南宁 530200）

摘要：反证法是数学中一种常见的证明法，其应用范围广泛，思维角度巧妙，因而在针对一些非常规的证明问题时，有着非常有效的效果。在初中阶段，教师则需要向学生解析反证法的数学思想，让学生掌握逆向思维的技巧，并且能够运用反证法，解决初始命题、基本定理、存在性、无限性问题的证明。本文即通过研讨反证法的理论依据、解题步骤以及注意问题，探析其在初中数学中的应用途径。

关键词：初中数学；反证法；数学思维

反证法是逆向思维在数学中的典型应用，注重由果溯因的思维技巧，往往在一些难以正向思考的问题中大放异彩，将棘手问题迎刃而解。笔者认为反证法的数学思想关键而重要，必须要对学生进行细致渗透，让学生既能够理解其含义，又能将其适当应用，获得理论和实践的双重能力。

一、数学思想中反证法的概念解析

（一）定义。在证明原命题的过程中，首先假设其命题结论的对立面是成立的，然后由已知条件证明该对立命题是矛盾的，进而证明原命题的成立性质，这样的证明方法为反证法。其理论依据为排中律和矛盾律。

（二）解题步骤。一般分为三步：第一步为反设，学生需要在清晰的题设条件下得出结论，进而提出其反结论，并对反结论设定肯定或否定的假设；第二步为归谬，在反设的前提下进行论证和推理，制造反结论与题设条件的矛盾；第三步为结论，依据归谬的矛盾，证明其反结论的成立与否，进而得出原结论的成立与否，完成证明过程。

（三）注意问题。第一，要正确否定结论。反证法需要学生以相反的方向展开思维过程，因此在反设一步中，学生必须要拥有良好的逻辑性，能够将原命题的结论准确反设；第二，要明确推理特点。归谬是反证法中最重要的环节，学生必须要在使用反证法前，设想或预测好其归谬的方式和条件，以做到胸有成竹；第三，要了解矛盾类型。归谬的结论是要立足于矛盾，但矛盾并不只存在于题设与反设之间，需要学生认识到更全面的命题矛盾，比如题设内部的矛盾、反设与真命题的矛盾等，由此才能保证反证法的正确应用。

二、初中数学中反证法的应用

（一）证明初始命题或基本定理。在初中阶段，很多数学的初始命题和基本定理，是通过反证法进行证明的。笔者则以勾股定理的证明过程为例，讲解反证法的应用过程。

例：在三角形MNT中，∠T为90°，三个角对应的边分别为m、n、t，求证 $t^2=m^2+n^2$。

证明：过T点作辅助垂线交MN于D，假设 $t^2 \neq m^2+n^2$，即假设 $MT^2+NT^2 \neq MN^2$，则有：MN2=MN·MN=MN·（MD+DN）=MN·MD+MN·DN，根据假设可知：MT^2 不等于MN·MD，或者NT2不等于MN·ND，即MD：MT ≠ MT：MN，或者ND：NT ≠ NT：MN。设∠M为∠1，∠N为∠2，∠MTN为∠3，∠MDT为∠4，∠TDN为∠5，那么在三角形MDT和MTN中，因为∠1不变，所以若MD：MT ≠ MT：MN，则∠4 ≠ ∠3。在三角形TDN和MTN中，因为∠2不变，所以若ND：NT ≠ NT：MN，则∠5 ≠ ∠3。又因为∠3 = 90°，所以∠4 ≠ 90°，∠5 ≠ 90°，这与辅助线TD ⊥ MN相矛盾。所以 $MT^2+NT^2 \neq MN^2$ 的假设不能成立，所以 $t^2=m^2+n^2$ 成立。

在初始命题或基本定理的证明当中，通常需要更高一层次的数学思想或内容才能展开复杂的证明过程，但是在反证法的思维角度下，就能够将问题的难度层次进行降低，让学生可以在当前学习阶段理解和掌握其证明的思维过程。

（2）证明否定性问题。这类问题是学生们学习中的难点，学生往往只会证明肯定性问题，但是对于证明一个结论不成立或者不正确，却受到了思维上的限制。因此教师就应当教会学生反证法，将否定性问题的证明过程转化为肯定性问题的证明，最终再由其证明结果的否定和矛盾，确定原命题的成立性。

例：已知自然数k，求证：k^2+k+2 不能被15整除。

证明：假设 k^2+k+2 可以被15整除，那么该数必然能被3和5整除，也就是说该数一定是3和5的倍数，那么其尾数就必然为0或5。又 $k^2+k+2=k(k+1)+2$，已知k为自然数的前提下，k（k+1）一定为偶数，那么k（k+1）+2同样为偶数，即尾数必然不等于5；又已知k（k+1）的尾数只存在0、2、6三种，因此k（k+1）+2的尾数也不等于0，由此证明假设不成立，即原命题"k^2+k+2 不能被15整除"成立。

在否定性问题的证明过程中，教师需要让学生学会转化思想，将否定转化为肯定后，还必须要分析每一种情况的可能性，全部出现矛盾之后，才能证明原否定命题的成立。

（3）证明无限性问题。该类问题同样是学生棘手的难题之一，一提到无穷、无限等字眼时，很多学生就不知道该从何入手，但是在掌握了反证法之后，其证明过程就会显得清晰而简单。

例：求证在0与1之间存在无数个有理数。

证明：假设在0与1之间存在n个有理数，分别为 x_1、x_2、x_3……x_n，已知有理数的乘积仍为有理数，则有y=x1+x2+x3……xn，那么y也是0到1之间的一个有理数，且与 x_1、x_2、x_3……xn都不相同，那么可得在0与1之间存在n+1个有理数，这与假设相矛盾，则可以证明原命题的成立。

三、结语

总之，反证法是初中阶段非常有效的一种证明思想，教师需要帮助学生掌握逆向的思维方式，通过转化思维角度，降低解题难度，达到更高的思维境界。

参考文献：

[1] 张本陆 . 反证法在初中数学解题中的应用 [J]. 文理导航（中旬），2018（11）.

[2] 莫美珍 . 浅谈反证法在初中数学解题中的应用 [J]. 学周刊，2018（17）.