构造相似基本图形 通解运动最值问题

王志奎

（仁怀市周林学校，贵州 仁怀 564500）

摘要：近几年各地中考压轴题中出现了求“a+kb”的最小值（a，b 为线段，k 为系数，且 0<k<1）这类问题，这类问题对学生来讲总是感到束手无策的。本文以 2017 年遵义中考试题为例，通过几何画板的演示来培养学生找到解决这类问题的方法，即构造基本图形，找到通法通解，从而培养学生的数学转化思想和数学思维能力。

关键词：几何画板；构造；基本图形；转化

一、问题

（2017 年遵义中考）如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx-a-b$（$a<0,a$、b 为常数）与 x 轴交于 A、C 两点，与 y 轴交于 B 点，直线 AB 的函数关系式为 $y=\frac{8}{9}x+\frac{16}{3}$.

（1）求该抛物线的函数关系式与点 C 的坐标 .

（2）已知点 M（m，0）是线段 OA 上的一个动点，过点 M 作 x 轴的垂线 l 分别与直线 AB 和抛物线交于 D、E 两点 . 当 m 为何值时，△ BDE 恰好是以 DE 为底边的等腰三角形？

（3）在（2）问条件下，当△ BDE 恰好是以 DE 为底边的等腰三角形时，动点 M 相应位置记为 M'，将 OM' 绕原点 O 顺时针旋转得到 ON（旋转角在 0° 到 90° 之间）.

i. 探究：线段 OB 上是否存在定点 P（P 不与 O、B 重合），无论 ON 如何旋转，$\frac{NP}{NB}$始终保持不变 . 若存在，试求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由 .

ii. 试求出此旋转过程中，（$NA+\frac{3}{4}NB$）的最小值 .

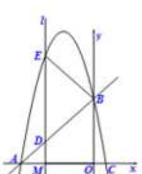

图1

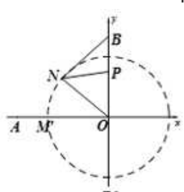

图2

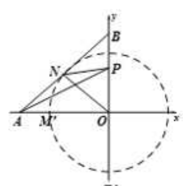

图3

思路分析：（1）抛物线的解析式为 $y=-\frac{8}{9}x^2-\frac{40}{9}x+\frac{16}{3}$，点 C 的坐标为（1，0），具体过程略。

（2）m 的值为 –4，具体过程略。

（3）*i.* 该问考查目的是在线段 OB 上是否存在定点 P（P 不与 O、B 重合），无论 ON 如何旋转，$\frac{NP}{NB}$始终保持不变 . 通过利用几何画板（如图 2）发现，当 OP=3 时，$\frac{NP}{NB}$始终保持不变，且 $\frac{NP}{NB}=\frac{ON}{OB}=\frac{3}{4}$，所以 P 点的坐标为（0，3）. 因此解答过程为：假设P(0,3)，则 OP=3，因为 ON=OM'=4，OB=$\frac{16}{3}$，所以$\frac{ON}{OB}=\frac{3}{4}$，$\frac{OP}{ON}=\frac{3}{4}$，所以$\frac{ON}{OB}=\frac{OP}{ON}=\frac{3}{4}$，又因为$\angle NOB=\angle PON$，所以$\Delta NOB\backsim\Delta PON$，所以$\frac{NP}{NB}=\frac{ON}{OB}=\frac{3}{4}$（定值），故无论 ON 如何旋转，总存在点 P（0，3），使得$\frac{NP}{NB}$始终保持不变。

i. 如图 3，由（*i*）可知，$NP=\frac{3}{4}NB$，因此求 $NA+\frac{3}{4}NB$ 的最小值，从而转化为求 $NA+NP$ 的最小值，如图 3，通过利用几何画板发现，当点 A、N、P 三点共线时，$NA+NP$ 的值最小。事实上，转化为“两点之间，线段最短”。因此解答过程为：由（*i*）可知，$NP=\frac{3}{4}NB$，所以 $NP=\frac{3}{4}NB$ = $NA+NP\geq AP=$ $\sqrt{OA^2+OP^2}$ $=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，即 $NP=\frac{3}{4}NB$ 的最小值为 $3\sqrt{5}$。

说明：解决这类“a+kb”的最小值（a，b 为线段，k 为系数，且 0<k<1）问题的关键是构造相似三角形，如图 2 中的 $\Delta NOB\backsim\Delta PON$，而这类问题比较特殊，如图 2，特殊的地方在于 ON 与 OB 的比恰好等于 k，所以只需取点 P 使 OP 与 ON 的比也等于 k，从而构造相似三角形，但这对于在考场上的学生来讲，要想在一定时间内解答好此问题时非常困难的。其主要困难点在两个方面，即：①动点是在圆弧上而不是在直线上运动，动点到圆心的距离是不变的；②要能构造出相似三角形，将 kb 转化成一条线段。

二、通法通解

这里的通法通解指的是解决求“a+kb”的最小值（a，b 为线段，k 为系数，且 0<k<1）这类问题 . 如图 4，点 P 是⊙ O 上的动点，A，B 是两个定点，求 PB+k・PA（0<k<1）的最小值，其操作步骤如下：

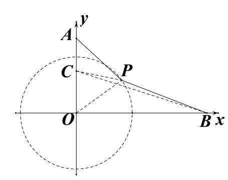

图 4

（1）连接 OP，得到 ΔOPA；（2）计算 $\frac{OP}{OA}$ 的值；（3）在线段 OA 上截取线段 OC，使得 $\frac{OC}{OP}=k$；（4）由 $\frac{OC}{OP}=\frac{OP}{OA}=k$，$\angle AOP=\angle POC$，得 $\Delta POC\backsim\Delta AOP$，从而可得 $\frac{PC}{PA}=\frac{OP}{OA}=k$，所以有 PC=k・PA；（5）连接 BC，计算 BC，线段 BC 的长就是 PB+k・PA 的最小值。

三、思考

思考：在前面讲的通法通解中，求“a+kb”的最小值（a，b 为线段，k 为系数）这类问题中 k 的取值范围是 0<k<1 的，那么当 k>1 时，又会是怎样的情况呢？

（1）当 k>1 时，能用前面讲的通法通解完成吗？笔者通过举例进行了说明，答案是肯定的，不能用前面的通法通解来完成。

（2）当 k < 1 时，若将 PB+k・PA 变成 $k\cdot(\frac{1}{k}PB+PA)$ 能用前面讲的通法通解完成吗？笔者也通过举例进行了说明，答案是肯定的，仍不能用前面的通法通解来完成，那么该怎么解决呢？

（3）前面的通法通解中的 k 恰好为构造相似三角形的相似比，那么 k 能取任意值吗？笔者认为答案也是肯定的，k 不能取任意值。

因此，在应用本文所讲的通法通解时，必须注意 k 的条件是有限制的。