

# 一题多解，万法归宗

## ——挖掘课本习题的教学价值

甘燕妮

(广西壮族自治区南宁市第十四中学, 广西南宁 530028)

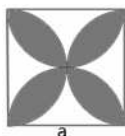
**摘要:** 阴影(不规则图形)面积求解是初中数学常见的题型。本文通过一道课本习题的深度挖掘, 归纳出不规则图形面积求解的常见思路和方法, 发散思维, 开拓视野。

**关键词:** 不规则图形; 面积求解; 割补法; 转化思想

课本例题和习题的教学在数学教学中并不陌生, 很多教师都注意到例题的教育价值, 在课堂中会花大篇幅去研讨, 然而, 对于课后习题, 仅停留在布置作业后简单讲评即可的层面上, 没有对习题的解题方法进行深度挖掘, 浪费了宝贵的教育素材。诚然, 例题教学是课堂教学的重要组成部分, 它兼具定理运用、方法引领以及解题示范于一身, 对学生数学能力的塑造起到重要作用。然而, 有些课本习题也具有与例题同等重要的作用, 应引起我们的重视。下面, 我们通过人教版《数学》九年级上册 115 页第 4 题来说明。

### 一、课本习题的解题示范

如图, 正方形的边长为  $a$ , 以各边为直径在正方形内画半圆, 求图中阴影部分的面积。



学生普遍反映该题难度较大, 找不到解题思路, 所以, 我将此题定位为求不规则图形面积的例题示范, 引导学生从不同角度去寻找解题思路。

#### (一) 审题分析

通过了圆这一章的学习, 九年级学生的几何直觉思维能力有了进一步提高, 并已初步认识到求不规则图形的面积要转化为几个规则图形面积的和或差。但学生会受本题图形构造复杂的影响而难以找到阴影部分的形成方式。本题教学的目的在于, 一方面培养学生从复杂图形中分离出基本图形的能力, 进而感受“转化”和“化归”思想在数学解题中的引领作用; 另一方面引导学生学会多角度分析问题, 进而感受数学的灵活美以及数学内在的和谐与统一。所以本题的重点是将不规则图形的面积转化为规则图形面积的和或差, 难点是寻找转化的途径。

采用启发式教学, 鼓励学生一题多解, 充分调动其学习主动性; 兼用独立思考与小组讨论的学习方式, 引导学生及时反思、总结出解题的规律, 建构学生已有的知识体系。

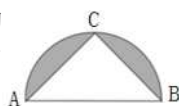
#### (二) 解题过程

解决原题的第一步是从复杂图形中找出基本图形、弄清它们和阴影部分之间的关系。为了突破难点, 先设计了第一个环节——

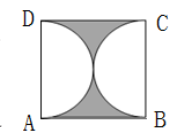
##### (环节一) 铺垫练习:

1. 如图, 以  $AB$  为直径画半圆, 点  $C$  是弧  $AB$  的中点, 求图中阴影部分的面积。

2. 已知正方形  $ABCD$  的边长为  $a$ , 以它的一组对边为直径向正方形内画半圆, 求图中阴影部分的面积。



3. 正方形  $AOBP$  的边长为  $a$ , 分别以点  $O$ 、 $P$  为圆心,  $a$  为半径向正方形内画弧, 求图中阴影部分的面积。



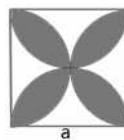
以上 3 题中, 第 1 个图形是一个半圆包含一个三角形, 第 2 个图形是一个正方形包含两个半圆, 第 3 个图形是一个正方形包含两个四分之一圆, 且有重叠。让学生由浅入深地分析。

对于第 3 题, 教师让学生通过画图体会阴影部分形成的过程并得到多种解法。

本环节三个题目遵循立足原题、由浅入深、渗透方法、开启思路的原则, 从不同角度观察、发现阴影部分与熟悉图形之间的关系, 为解决原题做铺垫。

#### (环节二) 解决原题

原题: 如图, 正方形的边长为  $a$ , 以各边为直径在正方形内画半圆, 求图中阴影部分的面积。



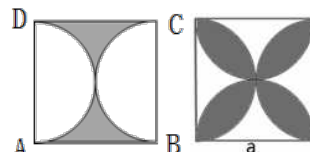
(为方便叙述将原题阴影部分的每一片称为“叶形”。)

此处给学生充分独立思考, 教师可根据学生的情况给予适当引导, 让他们从不同角度观察阴影部分的构成。

受铺垫练习第 2 题启发, 学生可能想到先求出两处空白部分的面积, 进而求阴影部分的面积。于是得到第一种解法。

解法一: (求余法) 转移目标, 另辟蹊径, 欲求“阴影”, 先求“空白”。先求两处空白部分面积, 再用正方形面积减去空白面积的两倍, 即可。

$$\begin{aligned} S_{\text{两个空白}} &= S_{\text{正方形}} - 2S_{\text{半圆}} \\ &= a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} \\ S_{\text{阴影}} &= S_{\text{正方形}} - 2S_{\text{两个空白}} \end{aligned}$$



铺垫练习第 2 题

$$= a^2 - 2(a^2 - \frac{\pi a^2}{4})$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} - a^2$$

解法一中学生把注意力放在了两个半圆上，教师引导他们：能否只利用其中一个半圆，找出它与叶形面积的关系。目的是让他们把本题与铺垫练习第1题联系起来，想到将半圆分割成三角形和弓形，于是就有了第二种解法。

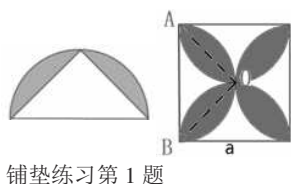
解法二：（构造弓形法）连接AO、BO，根据对称性可知，每个“叶形”的面积 = 半圆面积 - 等腰三角形AOB的面积，

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 4 \times (S_{\text{半圆}} - S_{\Delta AOB})$$

$$= 4 \times [\frac{1}{2} \pi (\frac{a}{2})^2 - \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a]$$

$$= 4 \times (\frac{\pi a^2}{8} - \frac{1}{4} a^2)$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} - a^2$$



铺垫练习第1题

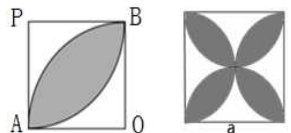
前两种解法都是从静态的角度来看阴影部分，我们也可以从动态的角度观察。不妨让学生通过画图来体会阴影部分的形成过程。有了这个体验过程和铺垫3的启发，学生得到如下解法。

解法三：（覆盖法）因为阴影部分是四个半圆的重叠部分，所以：

$$S_{\text{阴影}} = 4 \times S_{\text{半圆}} - S_{\text{正方形}}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \pi (\frac{a}{2})^2 - a^2$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} - a^2$$



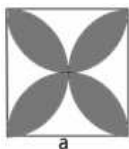
铺垫练习第3题

上述都是用几何方法来解决的，我们有时也可以用代数方法来解几何问题。为此，引导学生引进未知数，建立方程，解决这道题。

解法四：（方程法）观察发现该图由若干个相同面积的部分组成，不妨设一个叶形面积为x，一块空白部分的面积为y，则有：

$$\begin{cases} 4x + 4y = a^2 \\ 2x + y = \frac{1}{2} \pi (\frac{a}{2})^2 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4} \\ y = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} \end{cases}$

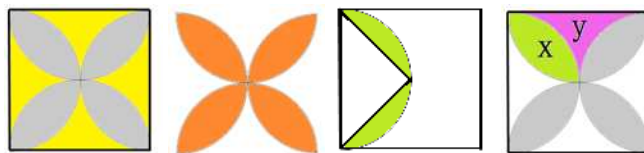


$$\therefore S_{\text{阴影}} = 4x = 4 \times (\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}) = \frac{\pi a^2}{2} - a^2$$

这个环节学生的思维角度较多，教师可以让他们分小组讨论，

来完成小结和反思，以便形成解题经验。

（环节三）小结反思



求余法      构造弓形法      覆盖法      方程法

（1）解法一通过先求出余下面积的方法来得到阴影部分的面积，体现了转化和整体的思想；

（2）解法二将叶形面积转化为弓形面积来求，渗透了化归的思想方法；

（3）解法三从运动角度、利用整体思想使解法更加简洁明快；

（4）解法四采用了数形结合的研究方法，体现了代数与几何的内在联系与统一。

原题的各种解法的共同点是：先通过把图形进行拆分、弄清阴影部分的构成，再将其转化为基本图形面积的和差。充分体现了新问题要转化为熟悉的问题，渗透了转化的数学思想。

二、课本习题的解题小结

在课本习题的讲解前，为了降低学生解题的畏惧感，将习题先做“解剖”，分解成若干个为解决服务的小问题，分散难点，便于学生拾级而上，找到自己解题的“最近发展区”，让更多学生参与到难题的分析和讲解上来，充分调动他们的学习热情。在习题的解题过程中，以“转化思想”为主线，同时渗透化归、整体、数形结合、方程及类比思想。在寻找转化的途径时，培养学生多角度看问题，尊重不同学生的思维特点，提高其思维的灵活性和发散性，发挥课本习题的引领作用。

通过这道课本习题的深度挖掘和全方位探讨，学生可以体会到：无论从哪个角度考虑，阴影部分面积的常规解法就是将不规则图形的面积转化为规则图形面积的和差，从而得到解决该类问题的“通法”，“一题多解，万法归宗”，这正是数学教学倡导的方法。

三、结语

教材是学生数学学习的重要线索。教师是不仅教材的使用者，更是开发者。课后习题是教材的重要组成部分，是正文的补充、延续和拓展。重视习题教学，从而突出知识之间的联系与综合，既有利于帮助学生建构完整的知识体系，也能够通过多种思维方法的融合实现学生数学能力的培养和提升。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部制. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.

[2] 教育部基础教育司数学课程标准研制组. 全日制义务教育数学课程标准解读（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.