赏析几道“老题”的巧解与妙解

查宝才

（江苏省扬州市新华中学，江苏 扬州 225002）

摘要：高中复习离不开解题训练，解题是数学教和学中一个重要环节，但解题不是简单的做一个题目，解决一个问题，而是要通过解题来训练和发展学生的思维，让核心素养内化落地。如何突破解题思维的瓶颈，通式通解是学生必须掌握的基本思路，巧解妙解则是独辟蹊径，往往会锦上添花，但需要拓展思维的深度和广度，也需要师生在平时的复习中有意识地进行强化训练。如此，才会让经典老题继续经典。

关键词：老题；巧解；妙解

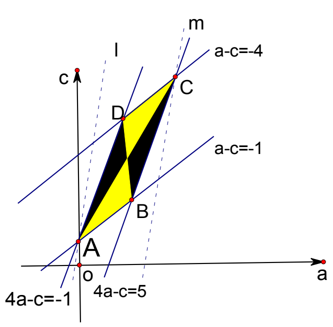
多年高三的教师会有较深的体会，一些“老题”年年在各种不同资料上出现，所以对于教师而言会轻而易举识破解答。但我们并不能总以老方法对付老问题，我们的解答若没有创新，就没有吸引力，过程就不会精彩。下面根据笔者平时教学的积累，介绍几道经典“老题”的巧解与妙解供大家欣赏 .

例 1 假设函数 $f(x)=ax^2-c$，若 $-4\le f(1)\le -1,\ -1\le f(2)\le 5$，试求 $f(3)$ 所满足的取值范围 .

巧解：转化为线性规划问题 .

将 f（1），f（2）对应的范围代入函数，可得 $\begin{cases}-4\le a-c\le -1,\\ -1\le 4a-c\le 5,\end{cases}$ 整理为 $\begin{cases}a-c\ge -4,\\ a-c\le -1,\\ 4a-c\ge -1,\\ 4a-c\le 5.\end{cases}$

作出此不等式组所表示的可行区域，如下图 .



再将所求式子 $f(3)=9a-c.$ 视为一个目标函数，平移动态直线，可以观察到 $f(3)=9a-c.$ 在点 A 处取得最小值，在点 C 处取得最大值 .

联立方程组 $\begin{cases}4a-c=-1.\\ a-c=-1.\end{cases}$ 得 A（0，1）；再联立 $\begin{cases}a-c=-4,\\ 4a-c=5,\end{cases}$ 可得 C（3，7）

$\therefore f(3)_{\min}=9\times 0-1=-1,\ f(x)_{\max}=9\times 3-7=20$

$\therefore -1\le f(3)\le 20.$

妙解：借助向量分解定理 .

由 $f(1)=a-c, f(2)=4a-c, f(3)=9a-c$

记 $\vec{P_1}=\vec{a}-\vec{c}, \vec{P_2}=4\vec{a}-\vec{c}, \vec{P}=9\vec{a}-\vec{c}$，

显然 $\vec{P_1},\vec{P_2}$ 不共线 . 根据向量分解定理得：$\vec{P}=\lambda_1\vec{P_1}+\lambda_2\vec{P_2}(\lambda_1,\lambda_2为实数)$,

即 $9\vec{a}-\vec{c}=\lambda_1(\vec{a}-\vec{c})+\lambda_2(4\vec{a}-\vec{c})=(\lambda_1+4\lambda_2)\vec{a}-(\lambda_1+\lambda_2)\vec{c}.$

$\therefore\begin{cases}\lambda_1+4\lambda_2=9,\\ \lambda_1+\lambda_2=1.\end{cases}$ 解得 $\lambda_1=-\frac{5}{3},\lambda_2=\frac{8}{3}$。$\therefore f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)$

又 $-4\le f(1)\le -1\Rightarrow \frac{5}{3}\le -\frac{5}{3}f(1)\le\frac{20}{3}$,

$-1\le f(2)\le 5\Rightarrow -\frac{8}{3}\le\frac{8}{3}f(2)\le\frac{40}{3}.$

两式相加，得 $-1\le f(3)\le 20$.

例 2 已知 a、b、$c\in R, a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1$，试求参数 a 所满足的范围（ ）.

A. $\left[\frac{1}{3},1\right]$　B. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$　C. $[0,1]$　D. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

巧解：联想构造函数 .

由 $b+c=1-a, b^2+c^2=1-a^2$，联想构造函数

$f(x)=2x^2-2(b+c)x+b^2+c^2=(x-b)^2+(x-c)^2\ge 0$ 恒成立 .

故有

$$\Delta = 4(b+c)^2 - 8(b^2+c^2) \le 0 \text{即} 4(1-a) - 8(1-a^2) \le 0,$$

可解得 $-\dfrac{1}{3} \le a \le 1.$

妙解：联想直线与圆的位置关系 .

由 $b+c=1-a, b^2+c^2=1-a^2$，可提炼出点 (b,c) 在斜率为 -1 的直线 $x+y=1-a$ 上运动，同时又在圆心在原点的圆 $x^2+y^2=1-a^2$ 上一个动点，从而这两个动态图形轨迹必须有公共点，也即构造出的直线与圆必然有一个或两个相交点。因此，所得圆之圆心到所构造直线的距离必须等于或者小于该圆的半径，再由 $d=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{1-a^2}$，进一步解得 $-\dfrac{1}{3} \le a \le 1.$

例 3 已知实数 a，b 满足 $a \ge 0, b \ge 0, \text{且} a+b=1$，试证：

$$(a+2)^2 + (b+2)^2 \ge \frac{25}{2}.$$

巧解：用二次函数求最值 .

$\because a+b=1 \Rightarrow a=1-b$

$\therefore (a+2)^2+(b+2)^2=(3-b)^2+(b+2)^2=2b^2-2b+13$

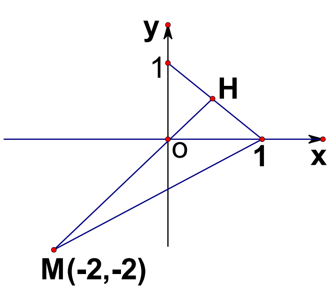
$\ge 2(b-1)^2+\dfrac{25}{2} \ge \dfrac{25}{2}$

妙解：联想点到线的距离公式 .

由条件 $a+b=1(a \ge 0, b \ge 0)$ 可知点 P（a,b）在线段 $x+y=1,(0 \le x \le 1)$ 上运动，$(a+2)^2+(b+2)^2$ 可具体视为定点 M（$-2,-2$）与一条线段 $x+y=1,(0 \le x \le 1)$ 上一个运动点 P（a,b）它们之间的距离的平方 . 由点到直线距离公式可知，所求问题能够进一步转化，即求定点 M 与直线上一个动点之间距离的最小值 .

再由公式可得 $d^2=\dfrac{|-2-2-1|^2}{2}=\dfrac{25}{2}$.

所以不等式必然成立 . 如下图所示 .



例 4 已知 $a,b \in R, \text{且} a \ne b$，求证：$\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-b^2}\right| < |a-b|$

巧解：构造复数

令复数 $z_1=1+ai, z_2=1+bi,$

则 $|z_1|=\sqrt{1+a^2}, |z_2|=\sqrt{1+b^2}, |z_1-z_2|=|a-b|$，

又 $\left||z_1|-|z_2|\right| < |z_1-z_2|$，所以 $\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-b^2}\right| < |a-b|$

妙解：构造函数 .

设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，则 $f'(x)=(\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

由 $\sqrt{1+x^2}>|x|$，得 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|<1$，也即 $|f'(x)|<1$.

其几何意义为等轴双曲线 $y^2-x^2=1$ 图像的上支中任意一点的切线的斜率之绝对值小于 1.

又 $x \in R$，所以图像上有过两点 A $(a, f(a)), B(b, f(b))$ 的割线之斜率的绝对值也小于 1.

也即 $\left|\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right|<1$. 故而 $|f(a)-f(b)|<|a-b|$，即 $\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-b^2}\right|<|a-b|$.

奋战在教学一线的老师常年与同样类型的题目打交道，感觉拿到手的题目几乎是些见过、做过、讲过若干遍的陈题旧题，没有那种研究的兴趣劲，大有审美疲劳之态。其实“老题”虽老，其蕴含的数学思想方法和耐人寻味的解题方法，尤其通过巧解和妙解会让人再次感觉到老题的数学魅力和味道，经典题自有其经典的道理。

参考文献：

[1] 李清洲 . 一道高三模拟题的妙解 [J]. 中学数学教学参考，2018（06X）：52-53.

[2] 任宪伟，孙爱环 . 用好教材习题妙解高考题或模拟题一例 [J]. 数学通讯：学生阅读，2014（10）：18.

[3] 罗连国 . 巧思妙解高考题 [J]. 中学数学研究，2006（10）：31-34.