一轮“圆”月入锥中

吴 迪

（杭州绿城育华学校，浙江 杭州 310000）

摘要：本文主要介绍利用圆锥曲线的统一形式，利用曲线系的方法得出四点共圆的充要条件，从而可以快速解决相关试题．

关键词：圆锥曲线；四点共圆；试题研究

2021 年全国卷数学圆锥曲线压轴题设计别有韵味，命题者将直线、圆、双曲线融为一体，这是在 2002 年、2005 年湖北卷、2009 年、2010 年、2011 年、2014 年、2016 年基础上的又一次创新，既研究了平面几何的基本性质，又深入研究了解析几何。2021 年的圆锥曲线压轴题将 2016 年全国卷文科的椭圆四点共圆性质推广到双曲线中。

文献 [1] 中研究了直线与椭圆的相交的斜率性质，文献 [2] 利用文献 [1] 结论，利用倒角公式得出对角互补，从而得出圆锥曲线的四点共圆性质，文献 [3] 利用极坐标工具，分别在椭圆、双曲线、抛物线中研究得出四点共圆性质。笔者在研究文献 [5]2021 年全国卷 I 的圆锥曲线题时，通过回归课本，对比发现这道高考题以人教社 A 版必修 4–4 第 38 页的例 4 为背景进行命制，体现了高考试题来源于教材，但又高于教材的特点，说明我们在平时的教学中，需要把课本作为一本重要的学习材料，深入研究．

文献 [4] 中的定理：如果两个二次曲线方程为 $S_i=0$（$i=1,2$），这里的 S_i 是 x，y 的二次多项式，那么 $\lambda S_1+uS_2=0$ （ë，¡ 为实数，不全为 0），对每一组 ë，i ，均表示为过上述两曲线交点的二次曲线。

定理：圆锥曲线 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ （$A\neq B$），直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，交椭圆于 P，Q 两点，直线 l_2：$y=k_2x+b_2$，交椭圆于 R，S 两点，直线 l_1 与 l_2 相交于点 T，则 P、Q、R、S 四点共圆的充要条件为：$k_1+k_2=0$。

证明：由文献 [4] 知，设过 P、Q、R、S 四点的曲锥曲线方程为：

$$(k_1x-y+b_1)(k_2x-y+b_2)+\mu(Ax^2+By^2+Dx+Ey+F)=0$$

必要性：若 P、Q、R、S 四点共圆，则上述左边展开式中 xy 的系数为 0，即 $-k_1-k_2=0$，从而 $k_1+k_2=0$。

充分性：

当 $k_1+k_2=0$ ①时，由上述左边展开式中的 x^2,y^2 的系数相等，得 $k_1k_2+\mu A=1+\mu B$ ②，由①②联立得：$u=\dfrac{1+k_1^2}{a-b}$

方程整理得：$x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$ ③

由于 P、Q、R、S 四点在圆锥曲线上，所以③式表示圆的方程。

从而当 $k_1+k_2=0$ 时，P、Q、R、S 四点共圆。

例 1（2016 年四川）已知椭圆 $\boldsymbol{E}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设不过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B. 线段 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 E 交于 C、D. 证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

解析：（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$$，则有 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$

即 $\dfrac{2x_M}{4}+2y_M\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，所以 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{1}{4}$，又 $k_{AB}=\dfrac{1}{2}$，故 $k_{OM}=-\dfrac{1}{2}$

所以设直线 OM 为 $y=-\dfrac{1}{2}x$，直线 AB 方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$，所以由 A、B、C、D 四点和椭圆构成的曲线系方程可设为：

$$\frac{x^2}{4}+y^2-1+\lambda(\frac{1}{2}x-y+m)(\frac{1}{2}x+y)=0,$$

整理得：$\dfrac{1+\lambda}{4}x^2+(1-\lambda)y^2+\dfrac{m\lambda}{2}x+m\lambda y-1=0$

由于无 xy 项，则当 $\dfrac{1+\lambda}{4}=1-\lambda$ 得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$，圆方程为 $x^2+y^2+\dfrac{3m}{4}x+\dfrac{3m}{2}y-\dfrac{5}{2}=0$，

$4R^2=(\dfrac{3m}{4})^2+(\dfrac{3m}{2})^2+4\times\dfrac{5}{2}>0$，故 A、B、C、D 四点共圆恒成立。

所以 $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$。

另解：运用定理可得 $k_{AB}+k_{CD}=0$，从而 A、B、C、D 四点共圆，所以 $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$。

例 2(2021 年新课标 1 卷)在平面直角坐标系 xoy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$，记点 M 的轨迹为 C.

(1)求 C 的方程：$F_2(\sqrt{17},0)$

(2)设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A,B 两点和 P,Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

解析：（1）$x^2-\frac{y^2}{16}=1(x>0)$；

（2）令 AB：$y-n=k_1(x-\frac{1}{2})$，PQ：$y-n=k_2(x-\frac{1}{2})$，因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以 A，P，Q，B 四点共圆，以 AB，PQ 构成的弱化二次曲线方程为：

$(k_1x-y-\frac{1}{2}k_1+n)(k_2x-y-\frac{1}{2}k_2+n)=0$，则以 AB，PQ 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{16}-1=0$ 构成的圆系方程为：$x^2-\frac{y^2}{16}-1+\lambda(k_1x-y-\frac{1}{2}k_1+n)(k_2x-y-\frac{1}{2}k_2+n)=0$，因为 xy 的系数为 0，所以 $\lambda(-k_1-k_2)=0$，所以 $k_1+k_2=0$。

另解：因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以 Q，P，B，A 四点共圆，运用定理可得：$k_1+k_2=0$。

例 3　（2011 年高考全国Ⅱ卷理科）已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

(1)证明：点 P 在 C 上；

(2)设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A,P,B,Q 四点在同一圆上.

简解：（2）由（1）得，$P(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$，易得直线 PQ 方程：$y=\sqrt{2}x$，AB 方程为：$y=-\sqrt{2}x+1$，因为 $k_{PQ}+k_{AB}=0$，所以 A，P，B，Q 四点在同一圆上。

例 4（2005 年湖北理科卷）设 A，B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点，点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线交椭圆于 C,D 两点.

(1)确定 λ 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

(2)试判断是否存在这样的 λ，使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上？并说明理由.

简解：（1）略

（2）由题意分析可得 $k_{AB}=1$，$k_{CD}=-1$，因为 $k_{AB}+k_{CD}=0$，所以 A、B、C、D 四点共圆。

通过以上高考圆锥曲线题的解答，我们可以清楚地看出，利用圆锥曲线上的四点共圆的充要条件，可以使学生比较便捷地判定四点共圆问题，避免比较冗长的讨论过程，起到化难为易，化繁为简的效果，同时为本类问题的研究指明了正确方向，也是学校开展研究性学习，培养学生核心素养的好材料。

参考文献：

[1] 储炳南 . 对一道全国高中数学联赛试题的推广 [J]. 数学通讯，2012（10）.

[2] 田富德　陈琛 . 圆锥曲线中的一个四点共圆性质 [J]. 中学数学研究，2014（4）.

[3] 孙志明 . 圆锥曲线上四点共圆的一个充要条件 [J]. 宜春学院学报（自然科学），2003（4）.

[4] 单墫 . 解析几何的技巧 [M]. 北京：中国科学技术大学出版社，2015.

[5] 北京天利考试信息网 . 全国各省市高考试题汇编全解 [M]. 拉萨：西藏人民出版社，2021.