导数的几种应用

冯婷婷

（大连财经学院，辽宁 大连 116600）

摘要: 随着国家教学的改革,教师关注的不仅仅只是理论知识的讲解,更多的是要使学生学会应用理论知识解决实际问题。大学数学中,导数的存在是贯穿在整个高等数学中，因此导数是微积分学中最为基础且最为重要的章节。本文在导数的概念的基础上，进一步研究导数的实质，使其应用在实际生活的各个领域中。

关键词： 微积分；导数；应用

随着社会的发展以及教学改革的研究，大学的教学内容不再仅仅局限于理论教学，更多的是理论知识的应用。应用之前，最重要的是要理解理论知识的本质，即理解其实质。《高等数学》是理工类、财经类院校学生都必须学习的一门科目。其中最为重要的内容便是微积分学，而导数在微积分学中是举足轻重的一个章节。本文主要论述了导数在各个领域中的应用。

一、导数的定义及其几何意义

（一）导数在一点处的导数

现有函数 $y=f(x)$，该函数在一点 x_0 的某个邻域内是有定义的。当自变量 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$（其中 Δx 为自变量改变量，可以为正，也可以为负，并且 $x_0+\Delta x$ 仍在 x_0 的有定义的邻域内）时，函数值也会相应的由 $f(x_0)$ 改变到 $f(x_0+\Delta x)$，$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 便是此时对应的函数改变量；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可导的，并且该极限是在点 x_0 处的导数，我们把它记作 $f'(x_0)$，用数学语言表示的话为：$y=f(x)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ 。

（二）导数的几何意义

根据导数 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的定义，可以观察出，导数其实是指的在某一点处一个因变量改变量与自变量改变量的比的极限值。从其实质而言，导数代表的是函数变化率的快慢问题。

二、导数的相关应用

（一）导数在经济中的应用

从古代经济到现代经济的快速成长都离不开数学的迅速发展，从小到矿泉水的购买、商品的贸易，大到跨国经济的往来，数学都扮演着极其重要的角色。历史上许多经济学家，其实也是伟大的数学家，正是因为他们的存在，推动了世界数学的进步，从根本上促进了经济的发展。因此，数学与经济息息相关，形影不离。

在经济学中，成本、收益以及利润是常用词。若是谈到经济中，有哪些知识是与导数有关的，便是成本、收益以及利润相应的边际问题。而对于边际问题，其均代表的是每增加一个单位的产品所带来的对应的增加的成本、收益以及利润，因此可以从其含义中看出，边际相关概念所对应的含义与数学中导数的几何意义类似。对于经济生活中的相关边际问题，可以将其转换为对应的导数问题进行解决。

例 1：现有一家公司生产某种产品，生产该产品的固定成本是 30000 元，其中每生产一个产品，其固定成本便会增加 20 元，该商品的总收益函数为 $R(x)=300x-x^2$（元），其中 x 表示生产该商品的个数，假设即生产量 = 销售量的话，那么当 $x=30$ 时的边际利润应该是多少?

解：总成本函数：$C(x)=30000+20x$（元）

总利润函数：

$$L(x)=R(x)-C(x)=300x-x^2-(30000+20x)$$
$$=280x-x^2-30000\text{元}$$

边际利润函数：$L_M(x)=\dfrac{dL(x)}{dx}=280-2x$（元）

当 $x=30$ 时的边际利润是 $L_M(30)=L'(30)=220$（元）。

在经济学中，还存在关于弹性的定义，例如需求弹性、价格弹性、收入弹性以及交叉弹性等相关弹性概念，其均代表的是函数 $f(x)$ 随自变量 x 的变化而改变的敏感度。因此可以看出，弹性所代表的含义均与数学中导数的几何意义类似，而弹性函数与其导函数定义相似。因此对于经济生活中的相关弹性问题，可以将其转换为对应的导数问题进行解决。

例 2：假设某商品的对应的需求函数 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$，其当 $p=3$ 时对应的需求弹性。

解：需求弹性函数为 $\eta(p)=\dfrac{EQ}{Ep}$，

即 $\eta(p)=\dfrac{p}{f(p)}f'(p)=\dfrac{p}{e^{-\frac{p}{5}}}(e^{-\frac{p}{5}})'=-\dfrac{p}{5}$，

则 $\eta(3)=-\dfrac{3}{5}$。

因此其当 $p=3$ 时对应的需求弹性为 $-$。

在市场经济中，每种商品的价格与商品销量都是瞬息万变的，商家会根据产品销量不断进行调整，在不断调整后，商家会根据产品销量以及商品价格的变化，总结出其对应的函数，用数学的形式表示出，并采用数学模型来使自己尽可能的将利润最大化。

例 3：某房地产公司为了将 x 套公寓出租，其租金定为 $p=2800-4x$，同时管理 x 套公寓总成本可表示成 $C(x)=5000+6x^2$，当 x 为多少时房地产公司可以获得最大利润?

解：利润函数：

$$L(x)=x(2800-4x)-(5000+6x^2)=-10x^2+2800x-5000$$
（$x\geq 0$）

$$L'(x)=-20x+2800$$

令 $L'(x)=0$，解得 x=140。

当 $x\in(0,140)$ 时，利润函数随着 x 的增大而增大；$x\in(140,+\infty)$ 时，利润函数随着 x 的增大减小。

因此当租出 140 套公寓时，其对应的利润最大为

$L(x)_{\max} = L(140) = 191000$（元）。

在经济领域中，为了使商家获得的利润更高，往往不一定是收益越高利润越高。只有当成本最低时，其对应的利润会相对的增多。因此若是收益一定的话，可以通过降低成本使利润增多。

例 4：现有一家共产生产羽绒服，其生产 x 件羽绒服所对应的成本是满足这样一个 $C(x) = 3x^2 + 6x + 30000$ 函数关系，那么当效益最好且生产平均成本最低时，应该生产多少件羽绒服？

解：假设平均成本为 $\overline{C}$ ，从题意得：

$$\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2 + 6x + 30000}{x} = 3x + 6 + \frac{30000}{x},$$

对成本函数求导，$\overline{C'(x)} = 3 - \frac{30000}{x^2}$ ，

令其导数 $\overline{C'(x)} = 0$ ，解得：x^1=100，x^2=-200（舍）

根据导数的第一充分条件可以得到，当 x 100 时，成本函数为减函数；当 x 100，成本函数为增函数。所以生产 100 件时厂家效益最好且平均成本最低。

（二）导数在物理学中的应用

众所周知，要想物理学的好，数学是很重要的基础。而导数主要是研究函数变化率问题，在物理中与之相关且最为熟悉的概念便是速度与加速度，均是研究变化率问题。因此对于速度与加速度问题，是可以通过把该问题转化为数学导数问题进而解决的。

例 5：在物理学中，存在这样一个现象，也是我们生活中常见的，就是当一个物体的温度是高于周边环境或者说是介质的温度时，该物体的温度就会不断下降，也就是不断冷却，假设某物体它的温度 T 与时间 t 的存在相关的关系，且该关系为 $T=f(t)$，当物体在 t 时刻的冷却速度是多少？

解：在给定的时刻 t 时，该时刻对应的物体温度为 $f(t)$；

当对应的时刻为 $t + \Delta t$（Δt 正负均可）时，其对应的物体温度为 $f(t + \Delta t)$；

在 Δt 时间内其温度变化为 $f(t + \Delta t) - f(t)$。

则比 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ 则是 Δt 时间的物体冷却平均温度，即

$$\bar{v} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}。$$

物体在时刻 t 时的冷却速度：

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = T'(t)。$$

（三）导数在医学中的应用

目前，许多医学院校中其实是不存在数学课程的。但是，医学中采用的原理不仅仅是人体医学原理，其中数学也在该领域中默默地贡献着。因此，随着医学院校对社会发展的认识以及数学的发展，很多医学院校都意识到数学在医学中的重要性。因此已经有部分医学院校已经开始尝试将数学融入学生的学习课程中，这也就意味着数学在医学中存在的价值在慢慢显露。

例 6：一般在医学中研究甲状腺的机能往往是通过放射性同位素碘 I 来进行研究。现将含量为 N_0 的碘 I 静脉注射于病人体内，此时体内血液中碘含量与时间 t 满足 $N = N_0 e^{-kt}$（其中 k 为正常数）的函数关系，当在 t 时刻碘的减少速度为多少。

解：在给定的时刻 t ，该时刻对应的碘含量为 $N(t) = N_0 e^{-kt}$ ；

当对应的时刻为 $t + \Delta t$（Δt 正负均可）时，其对应的碘含量为

$$N(t + \Delta t) = N_0 e^{-k(t + \Delta t)}。$$

则比 $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ 则是 Δt 时间的碘减少的平均速度，即

$$\bar{v} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}。$$

碘在时刻 t 时的减少速度：

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) = -kN_0 e^{-kt}。$$

（四）导数在生活中的应用

导数不仅在经济领域、物理学、医学中有着重要的作用，在建筑工程、航天科技以及与生活相关的各方面都有其应用。

例 4：现假设有一个盖子为正方形，且容积为 16dm^3 的长方体铁桶，其铁桶的盖子是由铝皮制成的，已知铝皮的价格为 36 元，铁皮价格为 12 元，如何设计可以使总造价最低？

解：假设该长方体铁桶的高为 hdm，其长，宽均为 xdm，且总造价为 y 元。

由题意得：$y = (4hx + x^2) \cdot 12 + 36x^2 = 48x^2 + 48hx$ ，

又因为 $hx^2 = 16$ ，得 $h = \frac{16}{x^2}$ 。

所以 $y == 48x^2 + \frac{768}{x}$ 。

其导数为 $y' = 96x - \frac{768}{x^2}$ ，

令其导数 $y' = 0$ ，得 $x = 8$ ，可以观察得知，在 $x \in (0,8)$ ，造价函数为减函数；当 $x \in (8, +\infty)$ ，造价函数为增函数，因此当其长、宽均为 2dm，高为 4dm 时，总造价最低，且为 $y_{\min} = 48 \times 4 + \frac{768}{2} = 576$ 。

参考文献：

[1] 同济大学数学系，高等数学（第七版）上册 [M]. 北京：高等教育出版社，2020（7）：75.

[2] 罗伯特・S. 平狄克，微观经济学（第九版）[M]. 北京：中国人民大学出版社，2020（2）：29-34.

[3] 蔺琳，李庆娟，经济数学基础 [M]. 沈阳：辽宁大学出版社，2018（7）：103.

[4] 吴传生，经济数学—微积分 [M]. 北京：高等教育出版社，2021（7）：90.

[5] 张选群，医用高等数学 [M]. 北京：人民卫生出版社，2013（3）：29.