基于媒体报道的一类随机 SIRS 传染病模型

戴晓娟
（宁夏师范学院数学与计算机科学学院，宁夏 固原 756000）

摘要: 本文把白噪声和媒体报道同时考虑到 SIRS 传染病模型中，从而得到了一个新的随机 SIRS 模型 . 通过构造适当的 C^2 函数，得到模型正解的存在性和唯一性的充分条件，并利用 $It\hat{o}$ 公式和局部鞅的大数定理对模型的灭绝性进行了分析，最后通过数值验证了证明结果的有效性 .

关键词： 媒体报道；SIRS 传染病模型；灭绝性

一、随机模型的建立和平衡点

近年来，越来越多的学者利用数学模型对传染病进行了动力学研究，尤其在传染病预防控制方面取得了一些研究性成果，其中信息媒介对疾病的影响受到了大家的重视，让人们树立防控的意识，有效遏制疾病的传播 . 为了描述传染病的动力学行为，本文首先给出一个 SIRS 模型

$$\begin{cases}\frac{dS}{dt}=\Lambda-\mu S-\frac{\beta SI}{\phi(I)}+\gamma R,\\ \frac{dI}{dt}=-(\mu+\nu+\delta)I+\frac{\beta SI}{\phi(I)},\\ \frac{dR}{dt}=-(\mu+\gamma)R+\nu I.\end{cases} \tag{1}$$

所有参数均非负，其中 S,I,R 分别表示 t 时刻易感者的人口数量，感染者的人口数量和已恢复者的人口数量，Λ表示易感染者的输入率，μ表示人口的自然死亡率，β表示传染率，ν 表示恢复率. $\gamma\gamma$表示恢复者成为易感者的比率；$\delta\delta$表示死亡率，$\frac{\beta SI}{\phi(I)}$是发生率，其中 ϕ 是一个正函数且 $\phi(0)=1$，$\phi'(I)\geq 0$.

事实上，媒体报道可以降低人与人之间的感染率，由于媒体的真实报道和宣传，才使人们有了充分的认识，减少了社会活动，从而能降低了疾病的传播。所以模型（1）中的传染率 β可表示为媒体报道的相关函数，即$\beta=\beta_1-\beta_2 f(I)$，其中$\beta_1$是排除感染者的一般接触率，$\beta_2$是受感染者影响而减少的最大接触率，$f(I)$是媒体介入传染病的影响因子 . 故假设$\beta_1>\beta_2$，函数$f(I)$满足

假设 1 $f(0)=0, f'(I)>0$, 且 $\lim\limits_{I\to\infty} f(I)=1$.

因为环境中存在着许多随机因素，如温度、风、雨和雪等，对病毒的传播造成了很多影响，所以本文把白噪声和媒介干扰同时考虑到 SIRS 传染病模型中，通过构造适当的 C^2 函数，得到模型正解的存在性和唯一性的充分条件，并对模型的灭绝性进行了分析。

除此，为了考虑环境波动的影响，将β_1表示为$\beta_1+\sigma\dot{B}(t)$，其中σ是噪声强度，B_t是标准的布朗运动 . 则模型（1）可表示为下列随机的具有媒体报道干预的 SIRS 模型

$$\begin{cases}dS=[\Lambda-\mu S-(\beta_1-\beta_2 f(I))\frac{SI}{\phi(I)}+\gamma R]dt-\frac{\sigma SI}{\phi(I)}dB(t),\\ dI=[-(\mu+\nu+\delta)I+(\beta_1-\beta_2 f(I))\frac{SI}{\phi(I)}]dt+\frac{\sigma SI}{\phi(I)}dB(t),\\ dR=[-(\mu+\gamma)R+\nu I]dt.\end{cases} \tag{2}$$

可见模型（1）的基本再生数为$R_0=\frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\mu+\nu+\delta)}$，

模型（1）有两个平衡点：一个是唯一的无病平衡点 $E_0=(\frac{\Lambda}{\mu},0,0)$；另一个是地方性平衡点$E^*=(S^*,I^*,R^*)$，它是下列方程的一个正解 .

$$\begin{cases}\Lambda-\mu S^*-(\beta_1-\beta_2 f(I^*))\frac{S^*I^*}{\phi(I^*)}+\gamma R^*=0,\\ (\beta_1-\beta_2 f(I^*))\frac{S^*I^*}{\phi(I^*)}-(\mu+\nu+\delta)I^*=0,\\ \nu I^*-(\mu+\gamma)R^*=0.\end{cases}$$

通过简单计算，可以得出

$$S^*=\frac{(\mu+\nu+\delta)\phi(I^*)}{\beta_1-\beta_2 f(I^*)},$$

$$R^*=\frac{\nu}{\mu+\gamma}I^*,$$

$$\Lambda-\frac{\mu(\mu+\nu+\delta)\phi(I^*)}{\beta_1-\beta_2 f(I^*)}-(\mu+\nu+\delta)I^*+\frac{\gamma\nu}{\mu+\gamma}I^*=0.$$

随机 SIRS 模型的基本再生数

$$R_0^s=R_0-\frac{\sigma^2\Lambda^2}{2\mu^2(\mu+\nu+\delta)}$$

视为模型随机灭绝（无病）或持久（地方病）的一个临界值。从随机噪声强度σ可以看出，当没有噪声影响时，$R_0^s=R_0$；当$R_0^s\leq 1$时，疾病消失；当$R_0^s>1$时，疾病持续存在并形成地方病。

二、正解的存在唯一性

定理 1 对任意给定的初始值 $(S_0,I_0,R_0)\in X$，当 $t\geq 0$ 时，模型（2）存在唯一的正解 (S_t,I_t,R_t)，仍然在 X 中。

证 明：令 $(S_0,I_0,R_0)\in\Gamma$，$N_t=S_t+I_t+R_t$，则 $dN_t=(\Lambda-\mu N_t-\delta I_t)dt$

如果 $(S_{t_1},I_{t_1},R_{t_1})\in X,\forall 0\leq t_1\leq t$，有

$(\Lambda-(\mu+\delta)N_{t_1})dt\leq dN_{t_1}\leq(\Lambda-\mu N_{t_1})dt$

通过整合，有 $\frac{\Lambda}{\mu+\delta}<S+I+R\leq\frac{\Lambda}{\mu}$

所以 $S_{t_1},I_{t_1},R_{t_1}\in(0,\Lambda/\mu),\forall t_1\in[0,t]$ （3）

上述模型（2）的系数满足局部 Lipschitz 条件，$\forall(S_0,I_0,R_0)\in X$，在 $[0,\tau_e]$ 上有唯一的局部解，其中 τ_e 是爆炸时间。为了证明解是全局的，需要证明 $\tau_e=\infty$ 几乎处处成立即可。

S_0,I_0,R_0 处于 $[\frac{1}{n_0},n_0]$ 间隔中，$n_0>0$ 足够大，对于每个整数 $n>n_0$，定义停时

$$\tau_n=\inf\{t\in[0,\tau_e]:\min\{S_t,I_t,R_t\}\leq\frac{1}{n}\ \ or\ \ \max\{S_t,I_t,R_t\}\geq n\}.$$

令 $\inf\varphi=\infty$（φ 表示空集）。当 $n\to\infty$ 时，τ_n 逐渐增大，$\tau_\infty=\lim_{n\to\infty}\tau_n$，那么 $\tau_\infty\leq\tau_e$。

为了证明 $\tau_e=\infty$，假设上述状态是错误的，则 $\exists T>0$，$\forall\varepsilon\in(0,1)$，使得 $P\{\tau_\infty\leq T\}>\varepsilon$。

因此存在一个整数 $n_1\geq n_0$ 使得 $P\{\tau_\infty\leq T\}\geq\varepsilon,n\geq n_1.$ （4）

定义 C^2 非负函数

V：$X\to R_+$ $V(S,I,R)=(S-1-\log S)+(I-1-\log I)+(R-1-\log R)$

如果 $(S_t,I_t,R_t)\in X$，利用 $It\hat{o}$ 公式，得到

$$\begin{aligned}dV=&((1-\frac{1}{S})(\Lambda-\mu S-(\beta_1-\beta_2 f(I))\frac{SI}{\varphi(I)}+\gamma R)+\frac{\sigma^2 I^2}{2\varphi^2(I)})dt\\&+((1-\frac{1}{I})((\beta_1-\beta_2 f(I))\frac{SI}{\varphi(I)}-(\mu+\nu+\delta)I)+\frac{\sigma^2S^2}{2\varphi^2(I)})dt\\&+(1-\frac{1}{R})(\nu I-(\mu+\gamma)R)-((1-\frac{1}{S})\frac{\sigma SI}{\varphi(I)}+(1-\frac{1}{I})\frac{\sigma SI}{\varphi(I)})dB_t\\:=&LVdt+\frac{\sigma(I-S)}{\varphi(I)}dB_t,\end{aligned}\qquad(5)$$

其中

$$\begin{aligned}LV=&\Lambda+3\mu+2\gamma+\delta+\frac{(\beta_1-\beta_2 f(I))I}{\varphi(I)}+\frac{\sigma^2I^2}{2\varphi^2(I)}+\frac{\sigma^2S^2}{2\varphi^2(I)}\\&-\mu(S+I+R)-\delta I-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\gamma R}{S}-\frac{(\beta_1-\beta_2 f(I))S}{\varphi(I)}-\frac{I}{R}\\&<\Lambda+3\mu+2\gamma+\delta+\frac{(\beta_1-\beta_2 f(\xi))\xi}{\varphi(\xi)}+\frac{\sigma^2\xi^2}{2\varphi^2(\xi)}+\frac{\sigma^2\Lambda^2}{2\mu^2\varphi^2(0)}:=K.\end{aligned}$$

则

$$dV(S,I,R)\leq Kdt+\frac{\sigma(I-S)}{\varphi(I)}dB_t,$$

$$\int_0^{\tau_n\wedge T}dV(S_r,I_r,R_r)\leq\int_0^{\tau_n\wedge T}Kdt+\int_0^{\tau_n\wedge T}\frac{\sigma(I_r-S_r)}{\varphi(I_r)}dB_r,$$

$\tau_n\wedge T=\min\{\tau_n,T\}$. 对上式不等式取期望得

$$EV(S_{\tau_N\wedge T},I_{\tau_N\wedge T},R_{\tau_N\wedge T})\leq V(S_0,I_0,R_0)+KT.\qquad(6)$$

令 $\Omega_n=\{\tau_n\leq T\},n\geq n_1$，以及（58）式，有 $P\{\Omega_n\}\geq\varepsilon$。

所以 $\forall\omega\in\Omega_n$，至少存在一个 $S_{\tau_n}(\omega),I_{\tau_n}(\omega),R_{\tau_n}(\omega)\equiv n\ \ or\ \ \frac{1}{n}$

使得 $V(S_{\tau_n}(\omega),I_{\tau_n}(\omega),R_{\tau_n}(\omega))\geq(n-1-\log n)\wedge(\frac{1}{n}-1-\log\frac{1}{n}).$

根据（6）式，可得

$$\begin{aligned}V(S_0，I_0\ \ R_0)+KT&\geq E[\chi\Omega\ (\omega)V(S_{\tau_n},I_{\tau_n},R_{\tau_n})]\\&\geq\ ((n-1-\log n)\wedge(\frac{1}{n}\text{-}1\text{-}\log\frac{1}{n})).\end{aligned}$$

$\chi\Omega_n$ 是 Ω_n 的指示函数，当 $n\to\infty$ 时，有

$\infty>V(S_0,I_0,R_0)+KT=\infty\ \ a.s.,$

这个命题显然不成立，因此可以得到 $\tau_\infty=\infty$。

注 1 从定理 1 中，可知集合几乎是确定不变的，即若 $(S_0,I_0,R_0)\in\Gamma$，则对所有的 $t\geq 0$，有 $\mathrm{Prob}\{(S_t,I_t,R_t)\in\Gamma\}=1.$

三、疾病的随机灭绝

定理 2 对任意的初始值（S（0），I（0），R（0））$\in\Gamma$，令是随机模型（2）的解，若

$$\sigma^2>max\{\frac{\mu\beta_1}{\Lambda},\frac{\beta_1^2}{2(\mu+v+\delta)}\},\qquad(7)$$

或

$$R_0^s\prec 1\text{且}\sigma^2\leq\frac{\mu\beta_1}{\Lambda},\qquad(8)$$

则随机 SIRS 模型（2）的解满足下列性质

$$\lim_{t\to\infty}sup\frac{lnI_t}{t}\leq -k<0\ \text{a.s.}$$

其中 $k=(\mu+v+\delta)(1-R_0^s)$。

证明：利用 $It\hat{o}$ 公式可得

$$d\,lnI=\varphi(S_t,I_t)dt+\frac{\sigma S_t}{\phi(I)}dB_t,$$

而 ϕ: $R_+^2\to R$ 定义为

$$\varphi(S_t,I_t)=\frac{(\beta_1-\beta_2 f(I_t))S_t}{\phi(I)}-(\mu+\nu+\delta)-\frac{\sigma^2S_t^2}{2\phi^2(I)}$$

因此，

$$ln\,I(t) = ln\,I_0 + \int_0^t \varphi(S(s),I(s))ds + \int_0^t \frac{\sigma S_s}{\phi(I)} dB_s \quad (9)$$

设$G(t) := \int_0^t \frac{\sigma S_s}{\phi(I)} dB_s$，有

$$\frac{\langle G,G\rangle_t}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\sigma^2 S_s^2}{\phi(I)} ds \le \frac{\sigma^2 \Lambda^2}{\mu^2(1+\alpha\frac{\Lambda^2}{\mu^2})} < +\infty$$

根据局部鞅的大数定理，有

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{G(t)}{t} = 0 \quad a.s$$

根据条件（7），得到

$$\varphi(S_s,I_s) = \frac{(\beta_1 - \beta_2 f(I_s))S_s}{\phi(I)} - (\mu+\nu+\delta) - \frac{\sigma^2 S_s^2}{2\phi^2(I)}$$

$$\le \frac{\beta_1 S_s}{\phi(I)} - (\mu+\nu+\delta) - \frac{\sigma^2 S_s^2}{2\phi^2(I)}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2}(\frac{S_s}{\phi(I)} - \frac{\beta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{\beta_1^2}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta)$$

$$\le \frac{\beta_1^2}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta),$$

根据（9）式，得

$$ln\,I_t \le ln\,I_0 + \int_0^t (\frac{\beta_1^2}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta))ds + G(t),$$

两边分别对 t 积分且$t\to\infty$，得出

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{ln\,I_t}{t} \le \frac{\beta_1^2}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta) < 0 \quad \text{a.s} \quad (10)$$

现在考虑$\sigma^2 \le \frac{\beta_1\mu}{\Lambda}$的情况，

$$\varphi(S_s,I_s) = -\frac{\sigma^2}{2}(\frac{S_s}{\phi(I)} - \frac{\beta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{\beta_1}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta)$$

$$\le -\frac{\sigma^2}{2}(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\beta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{\beta_1}{2\sigma^2} - (\mu+\nu+\delta)$$

$$= \frac{\Lambda\beta_1}{\mu} - \frac{\sigma^2\Lambda^2}{2\mu^2} - (\mu+\nu+\delta)$$

$$= (\mu+\nu+\delta)(R_0 - \frac{\sigma^2\Lambda^2}{2\mu^2(\mu+\nu+\delta)} - 1)$$

$$= (\mu+\nu+\delta)(R_0^s - 1),$$

从（9）式得到$ln\,I_t \le ln\,I_0 + (\mu+\nu+\delta)(R_0^s - 1)t + G(t)$，因此，得到

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{ln\,I(t)}{t} \le (\mu+\nu+\delta)(R_0^s - 1) < 0 \quad \text{a.s.} \quad (11)$$

定理 2 得证。

四、数值分析

选取函数 $f(I) = \frac{I}{M+I}$，显然 $f(I)$ 满足假设条件（1），同时选取一个满足条件的函数 $\varphi(I) = 1 + I^2$，则模型（2）可表示为

$$\begin{cases} dS = [\Lambda - \mu S - (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{\phi(I)} + \gamma R]dt - \frac{\sigma SI}{\phi(I)}dB(t), \\ dI = [-(\mu+\nu+\delta)I + (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{\phi(I)}]dt + \frac{\sigma SI}{\phi(I)}dB(t), \\ dR = [-(\mu+\gamma)R + \nu I]dt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dS = [\Lambda - \mu S - (\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{M+I})\frac{SI}{1+I^2} + \gamma R]dt - \frac{\sigma SI}{1+I^2}dB(t), \\ dI = [-(\mu+\nu+\delta)I + (\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{M+I})\frac{SI}{1+I^2}]dt + \frac{\sigma SI}{1+I^2}dB(t), \\ dR = [-(\mu+\gamma)R + \nu I]dt. \end{cases} \quad (12)$$

则模型（12）有一个无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu},0,0)$ 和一个地方病平衡点 $E^* = (S^*,I^*,R^*)$，其中 S^*,I^*,R^* 满足方程

$$S^* = \frac{(\mu+\nu+\delta)\phi(I^*)}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)},$$

$$R^* = \frac{\nu}{\mu+\gamma}I^*,$$

$$\Lambda - \frac{\mu(\mu+\nu+\delta)\phi(I^*)}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)} - (\mu+\nu+\delta)I^* + \frac{\gamma\nu}{\mu+\gamma}I^* = 0.$$

分别选取 Λ=1，μ=0.25，β_1=0.15，β_2=0.1，ν=0.1，γ=0.25，δ=0.05，M=10，计算得到

$$E_0 = (4.0,0,0),\quad E^* = (2.66738,0.00025,0.00005)$$

当噪声强度 $\sigma = 0.17$ 时，基本再生数 $R_0^s = 0.9220 < 1$ 和 $\sigma^2 = 0.0289 < \frac{\mu\beta_1}{\Lambda} = 0.0375$。类似的，当噪声强度分别等于 $\sigma = 0.18, 0.19$ 时，基本再生数分别为 $R_0^s = 0.852 < 1$，$\sigma^2 = 0.0324 < \frac{\mu\beta_1}{\Lambda} = 0.0375$ 和 $R_0^s = 0.778 < 1$，$\sigma^2 = 0.0361 < \frac{\mu\beta_1}{\Lambda} = 0.0375$，由定理 2 可知，疾病以概率 1 趋于灭绝。

五、结语

本文在媒体报道的基础上建立了随机噪声影响的 SIRS 传染病模型，通过构造适当的 C^2 函数，得到模型正解的存在性和唯一性的充分条件，并利用$It\hat{o}$公式和局部鞅的大数定理对模型的灭绝性进行了分析，根据数值算例验证了结论的有效性. 研究表明，随机噪声和媒介干扰可以降低人群感染的几率。

参考文献：

[1] 傅金波，陈兰荪. 具有垂直传染和接触传染的传染病模

型的稳定性研究 [J]. 数学杂志，2016，36（6）：1283-1290.

[2] 徐文雄，张仲华，成芳 . 一类 SIS 流行病传播数学模型全局渐近稳定性 [J]. 四川师范大学（自然科学版），2004，27（6）：583-588.

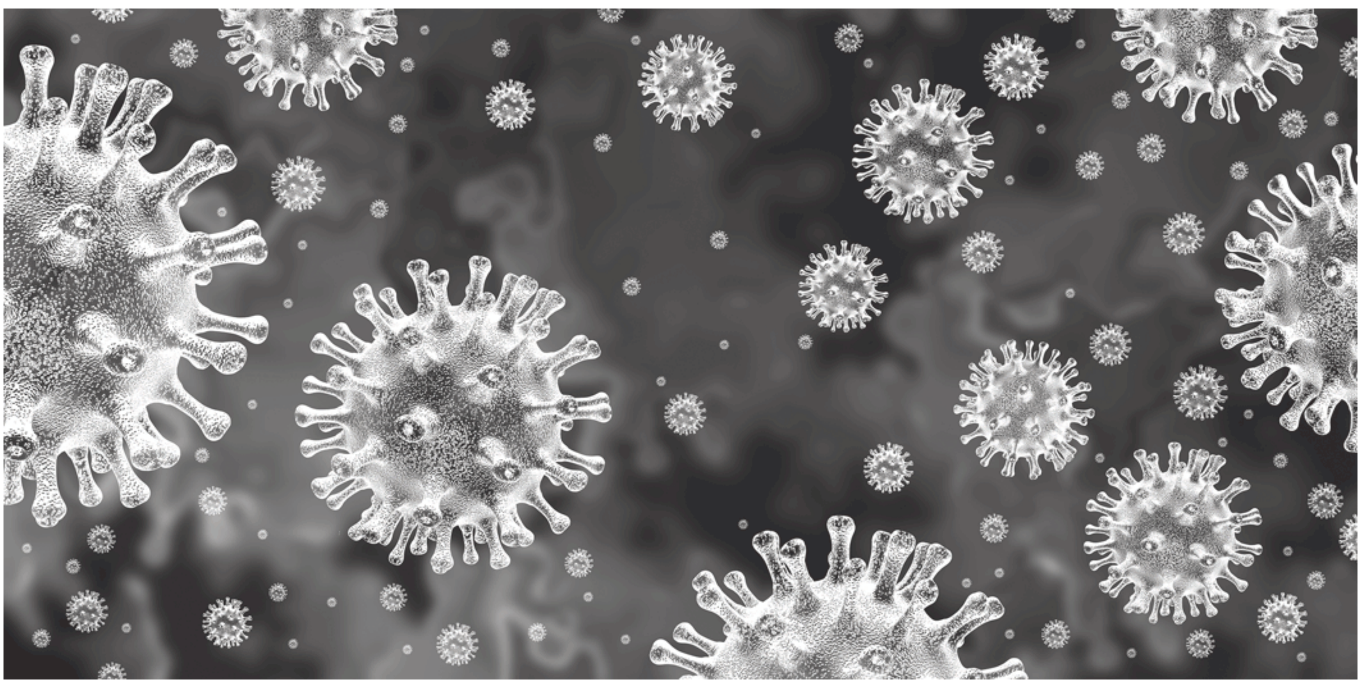
[3] 郭文娟，张启敏 . 媒体报道下的一类 SIS 传染病模型的动力学行为研究 [J]. 河南师范大学学报（自然版），2017，45（3）：42-47.

[4] 张林，李存林，郭文娟 . 基于媒体报道下的一类 SIRS 传染病模型研究 [J]. 数学杂志，2018（5）：887-895.

[5] 张启敏，曹博强，牟晓洁 . 具有信息干预的随机 SIRS 传染病模型正解的存在性与灭绝性 [J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2018，046（004）：1-7.

本文系：宁夏师范学院2021年校级科研项目（NXSFYB2106）的研究成果。

作者简介：戴晓娟（1983-），女，宁夏固原，讲师，硕士，研究方向：运筹学与控制论。



图文无关