HPM 视角下新人教 A 版《正弦定理》的教学设计

翁媛媛　许丽婷
（南宁师范大学，广西 南宁 530000）

摘要：当前新人教 A 版关于正弦定理部分改动较大，教师在教学实践中发现用向量法推导正弦定理时学生存在认知障碍，且不易于数学文化的渗透，而用“作高法”“面积法”等推导方法虽易于数学文化的渗透但却又脱离了单元主线。为了解决以上两种教学设计存在的问题，本文尝试基于 HPM 的视角并结合单元主线——“向量法”进行教学设计：由数学史进行引入，让学生了解正弦定理证明方法的发现过程，凸显数学文化的育人价值，并以“问题链”的形式贯穿向量法推导正弦定理的全过程，帮助学生克服认知障碍，从而培养学生的问题解决能力。

关键词：数学史；教学设计；问题链；

HPM 是数学史与数学教育之间的关系的简称。HPM 视角下的数学教学指的是把数学史料融入数学教学中，借鉴数学知识的发展历程，提升教学有效性，彰显育人价值的教学方式。《普通高中数学课程标准（2017 版）》中强调数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观，了解数学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值、美学价值，从而提高自身的文化素养和创新意识。

正弦定理是高中数学的重要定理，它将初中所学的直角三角形边角关系延伸到任意三角形中。它的证明方法经历了漫长的发展过程，从纳绥尔丁依据“同径法”进行证明，韦达用“外接圆”进行证明，再到哈里斯用“作高法”进行证明等等，其证明方法蕴含了丰富的数学文化，因此把数学史融入教学设计有助于学生了解数学知识的发展历程，提升教学有效性，彰显数学教学的育人价值。

在新人教 A 版中正弦定理和余弦定理不再作为单独的一章，而是被纳入《平面向量的应用》章节中，从单元教学出发，在正弦定理小节中渗透向量单元的主线，使学生领悟向量所蕴含的数学思想，掌握运用向量解决几何问题的方法具有重要意义。

因此，本文尝试在 HPM 视角下围绕向量主线进行正弦定理的教学设计，课前通过正弦定理证明史的，展示数学的科学价值、应用价值、人文价值等。课堂教学中采用问题链的形式，引导学生层层深入、循序渐进，从而培育学生的问题解决能力。

一、HPM 视角下新人教 A 版正弦定理的教学设计

（一）教材分析

正弦定理是新人教版 A 版高一数学第二册第六章《平面向量的应用》第四节的内容。从内容编排上，它在学生学习了向量及余弦定理后，进一步体会用向量法探索三角形边长与角度的关系习得的，也为后续学习正弦定理解决实际问题奠定知识基础，具有承上启下的作用。从数学方法上，它是代数方法解决几何问题的典例。

（二）学情分析

在心理特点上，高一学生求知欲强，乐于探索，因此教师可采用自主探究、合作探究等方式进行教学，培养学生的学习兴趣。在认知基础上，学生已经掌握了平面向量的运算、余弦定理解三角形，学习了特殊到一般的数学思想，具备了学习正弦定理的认知基础。在思维能力上，此阶段的学生数学思维能力尚属经验型，在用代数方法解决几何问题方面会存在困难，因此，教师的教学难点在于向量法推导正弦定理的过程。基于以上的学情分析，本文尝试采用问题链的形式，让学生在分析问题的过程中克服认知障碍，从而更好地掌握数学知识，提高解决数学问题的能力。

（三）教学目标

1. 了解正弦定理推导方法的发展过程，体会数学知识所蕴含的文化价值。

2. 掌握用向量法推导正弦定理，体会转化与化归的数学思想。

3. 掌握正弦定理并学会运用定理解决数学问题，了解定理的使用情境。

（四）重点难点

重点：正弦定理及其推导过程

难点：向量法推导正弦定理

（五）教学过程

1. 课前阅读

问题 1：什么是正弦定理？历史上哪些数学家研究过正弦定理？他们分别用什么方法研究呢？我们能想到其他的方法吗？

教师活动：教师给学生观看正弦定理的视频，视频首先介绍了正弦定理的起源，接着按照历史发展的顺序介绍了各位数学家推导正弦定理的方法和过程。

设计意图：教师通过让学生带着问题观看历史上数学家们研究正弦定理的视频，从而对正弦定理有初步认识，了解历史上数学家们推导定理的方法，启发学生像数学家一样思考，体会数学知识所蕴含的文化价值。

2. 创设情境

17 世纪，法国天文学家拉朗德为了计算地月距离，选取了三点，分别是月球上随机的一点（C）及柏林（A）和好望角（B），但由于当时测量手段的制约，无法直接测量地球上这两点距离月球的距离，只能测出∠ A、∠ B 的大小和 A、B 两地的直线距离，那么月球到柏林和好望角的距离分别是多少。

问题 1：同学们能从这个题目中抽象出怎样的数学问题呢？

教师活动：引导学生抽象出三角形中已知一边和两角求其他两边的问题，学生尝试用已有知识解决问题，但发现无法解决，教师进而提出用正弦定理解决。

设计意图：根据历史上法国天文学家拉德朗计算地月距离的现实情境进行教学导入，让学生体会正弦定理的由来，激发学生的学习动机，让学生在历史情境中进行定理的探究，寻求与数学家们的思想共鸣。

3. 探索定理

问题 1：在 ABC 中，设 A 的对边为 a，B 的对边为 b，求 A，B，a，b 之间的数量关系？

问题 2：在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，可以得出哪些关于正弦函数的边角关系？

问题 3：得出的边角关系如何用同一个等式表示？

问题 4：对于锐角三角形和钝角三角形，以上关系式是否仍然成立？请通过动态数学软件一起探究。

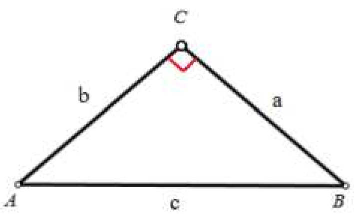

图 1 三角形 1

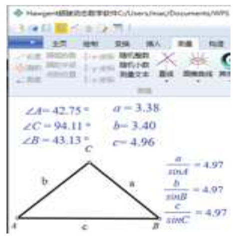

图 2 正弦函数边角关系

教师活动：通过提出问题引导学生用特殊到一般的思想来解决问题，接着引导学生在直角三角形中写出关于正弦函数的边角关系 $\sin A=\frac{a}{c}$， $\sin B=\frac{b}{c}$， $\sin C=\frac{c}{c}=1$，通过共有元素 c 化成同一个等式 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ，并通过几何画板的探究活动让学生体会在任意三角形中以上关系式都是存在的，并形成猜想。

设计意图：教师先让学生在直角三角形中回忆出学过的边角关系，并由此发现正弦定理的关系式，再使用几何画板来探究任意三角形中的边角关系，培养学生的数学猜想能力。

4. 定理证明

问题 1：通过探究我们知道上述关系式在任意三角形中都存在，同学们能用其他办法推导出在锐角三角形和钝角三角形中都有以上关系式吗？能像历史上数学家们一样发挥你们的脑洞吗？

教师活动：让学生发散思维去想办法，由于涉及三角形的边和角的关系，因此可以采用向量法来研究。

问题 2：这一章我们学习了“向量”这一有用的“武器”，那么我们如何利用这一“武器”证明三角形中存在上述关系式呢？以锐角△ ABC 为例。

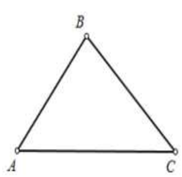

图 3 锐角三角形

教师活动：引导学生回顾向量章节解决问题的三部曲——“转化 – 运算 – 翻译”，指出利用向量知识研究三角形首先涉及第一步转化，即几何元素转化为向量语言，引导学生回答可以用三角形的加法法则，并写出结果，即 $\overline{AC}\times\overline{CB}=\overline{AB}$ 。

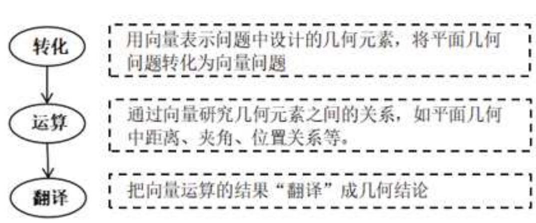

图 4 向量三步曲

问题 3：向量运算如何转化为涉及边长和角度的运算？

教师活动：在引导学生回答出第一步“转化”步骤后，提问第二步“运算”要如何把向量问题转化为三角形的边角运算，引导学生回答利用向量的数量积，并指出需要构造一个新的向量，通过在 $\overline{AC}\times\overline{CB}=\overline{AB}$ 这一式子的两边都乘以新的向量，即 $|\vec{j}||\overline{AC}|\cos\alpha+|\vec{j}||\overline{CB}|\cos\beta=|\vec{j}||\overline{AB}|\cos\gamma$ ，进一步指接下来需确定新向量的角度和长度。

问题 4：向量的数量积有的是角的余弦，如何把它转化为角的正弦呢？

教师活动：启发学生可以通过确定新向量的角度来实现余弦到正弦的转化，即利用诱导公式，构造角的互余关系实现余弦值和正弦值之间的转化。并与学生一起研究角 A 的余角，引导学生构造与 $\overline{AB}$ 垂直、∠ A 和∠ B 互余的向量 j。

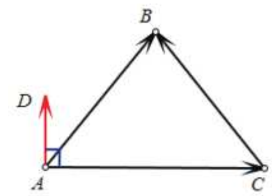

图 5 三角形 2

问题 5：向量 j 是唯一确定的吗？他的大小有何要求？

教师活动：引导学生回答 j 为单位向量，并写出转化过程，即 $|\overline{AC}|\cos\frac{\pi}{2}+|\vec{j}||\overline{CB}|\cos(\frac{\pi}{2}-C)=|\vec{j}||\overline{AB}|\cos\gamma(\frac{\pi}{2}-A)$ ，进一步化简得 a$\sin C$=$c\sin$A，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ ，同理，过点 C 作 $\overline{CB}$ 垂直的单位向量 m，可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ，因此 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ，锐角三角形中的边角关系得证。

设计意图：教师将向量法推导正弦定理的过程化成一系列环环相扣的问题，以问题链的形式，引导将探索三角形边长与角度关系的几何问题转化为向量运算的代数问题，渗透转化与化归思想，让学生克服认知障碍，提高问题解决能力。

问题 6：在钝角三角形中，能尝试推出以上关系式吗？

教师活动：让学生自己尝试在钝角三角形中推出正弦函数的边角关系式，并总结出定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 。强调定理的文字语言和符号语言，公式的统一性和对称美。

问题 7：正弦定理可以解决哪些解三角形问题？

教师活动：引导学生类比余弦定理总结。

5. 巩固练习

例 1 △ ABC 中，A=15° ，B=45° ，c=3+ $\sqrt{3}$，解这个三角形。

例 2 △ ABC 中，B=30° ，b= $\sqrt{2}$，c=2，解这个三角形。

6. 课堂小结

问题 1：什么是正弦定理吗？正弦定理怎么来的？

问题 2：在用向量法证明的过程中，蕴含了哪些数学思想？

问题 3：正弦定理适用于哪些问题类型？与余弦定理有何区别？

教师活动：教师提问，让学生在回答问题的过程中巩固知识，加深理解。

设计意图：通过课堂小结，巩固知识，培养学生反思总结能力。

二、结语

本教学设计遵循《课标》中“数学教学活动应融入数学文化”的要求，在HPM视角下对新人教A版《正弦定理》进行教学设计，教学设计实施后，在目标达成度方面，基于HPM的教学设计能够帮助学生了解正弦定理推导方法的发展历史，感受数学家的探索与创新精神，体会数学所蕴含的文化价值。问题链的教学手段能够克服学生在用代数方法解决几何问题过程中的认知障碍，帮助学生更好地掌握知识。

参考文献：

[1] 李逸博 .HPM 视角下正、余弦定理的教学研究 [D]. 西南大学，2021.

[2] 章建跃 . 如何理解用向量法推导余弦定理和正弦定理的设计意图 [J]. 中小学数学（高中版），2021，No.589（04）：66+64.

[3] 高宇 . 对人教 A 版新教材“余弦定理、正弦定理”的教学思考和实践 [J]. 中小学数学（高中版），2021，No.594（Z2）：28-31.