浅析等价无穷小在极限运算中的应用

汪敏庆

（桂林信息科技学院　广西　桂林　541004）

【摘　要】等价无穷小作代换是极限计算时的一种方便、有效的方法。本文主要围绕无穷小之比、变上限积分的极限、幂指函数和Taylor公式，利用等价无穷小的代换思想进行分析应用，以此达到极限运算中化繁为简，化难为易的目的．

【关键词】极限；等价无穷小；无穷小量；代换

A brief analysis of the application of equivalent infinitesimal in limit operation

Wang Minqing

(GuiLin Instiute of Information Technology,Guilin,Guangxi,541004)

[Abstract]Using equivalent infinitesimal substitution is a common, convenient and effective method to calculate the limit. This paper mainly focuses on the infinitesimal ratio, the limit of variable upper bound integral, the power index function and Taylor's formula, and uses the substitution idea of equivalent infinitesimal to analyze and apply, so as to achieve the purpose of simplifying the complicated and the difficult in the limit operation.

[Key words]Limit；Equivalent infinitesimal；Infinite subquantity；Substitute

1 预备知识

1.1 无穷小量的定义及性质

定义 设 f 在某 $U^0(x_0)$ 上有定义．若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

则称 f 为当 $x\to x_0 \to x_0$ 时的无穷小量．

由无穷小量的定义可立刻推得如下性质：

1.1.1 相同类型的多个无穷小量之和、差、积也为无穷小量。

1.1.2 有界量与无穷小量与积仍为无穷小量。

由函数极限与无穷小量的定义，有：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow A \leftrightarrow f(x)-A$ 是 $x\to x_0$ 的无穷小量．

1.2 等价无穷小的定义及性质

1.2.1 等价无穷小是指 $\alpha(x),\beta(x)$ 是 x 趋近于 x_0 的无穷小量，且 $\alpha(x)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是价无穷小量，记为 $\beta(x)\sim\alpha(x)$．

常见的用来代换的等价无穷小有：

$\sin x\sim x(x\to 0)$，$\tan x\sim x(x\to 0)$

，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0)$，$\arcsin x\sim x(x\to 0)$

$\arctan x\sim x(x\to 0)$，$e^x-1\sim x(x\to 0)$

，$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x(x\to 0)$

1.2.2 常见的性质有：

设 $\alpha=\alpha(x),\beta=\beta(x),\gamma(x)$ 是某一变化过程中的无穷小量，且 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0,$ 则

（1）$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta=o(\alpha)$ 或 $\alpha-\beta=o(\beta)$;

（2）$\alpha\sim\alpha$;

（3）$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$；

（4）$\alpha\sim\beta$ 且 $\beta\sim\gamma\Leftrightarrow\alpha\sim\gamma.$

2 等价无穷小在极限运算中的应用

2.1 乘积因子等价无穷小的替换

定理 1[6]：设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是某一变化过程中的无穷小量，极限 $\lim\frac{g(x)}{f(x)},\lim\frac{h(x)}{f(x)}$ 都存在且不为零，则当且仅当 $g(x)$ 与 $h(x)$ 为等价无穷小量时，有

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\frac{h(x)}{f(x)}.$$

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$．

定理 2：设 $f(x)$、$f_1(x)$、$g(x)$、$g_1(x)$ 是某一变化过程中的无穷小量，$f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$，且极限 $\lim\frac{h(x)g(x)}{f(x)}$ 存在，则

$$\lim\frac{h(x)g_1(x)}{f_1(x)}=\lim\frac{h(x)g(x)}{f(x)}.$$

证明：$\lim\frac{h(x)g_1(x)}{f_1(x)}=\lim\frac{h(x)g_1(x)f(x)g(x)}{f_1(x)f(x)g(x)}$

$$=\lim\frac{h(x)g(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g(x)}$$
$$=\lim\frac{h(x)g(x)}{f(x)}\cdot\lim\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\lim\frac{g_1(x)}{g(x)}$$
$$=\lim\frac{h(x)g(x)}{f(x)}.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{\sin^2 x}$.

解：由于 $\ln(1+x)\sim x,\sin^2 x\sim x^2$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot x}{x^2}=1$.

2.2 变上限函数极限的等价无穷小的替换

在变上限积分 $\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt$ 中，如果 $\varphi(x)\to\alpha$, 则该变上限积分就是一个无穷小，若能够找出这种类型在变上限积分的等价无穷小，那么在一些极限计算的过程中运用等价无穷小替换的方法，从而使极限的计算得到简化。

定理 3[7]: 若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处 n 可导，且 $f(t_0)=f'(t_0)=\cdots=f^{n-1}(t_0)=0$，$f^{(n)}(t_0)\neq0$, 则当 $\varphi(x)\to\alpha$ 时，变上限积分 $\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt$ 与 $\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}\cdot\left[\frac{(\varphi(x)-t_0)^{n+1}}{n+1}-\frac{(\alpha-t_0)^{n+1}}{n+1}\right]$ 是等价无穷小，即 $\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt\sim\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}\left[\frac{(\varphi(x)-t_0)^{n+1}}{n+1}-\frac{(\alpha-t_0)^{n+1}}{n+1}\right]$.

根据定理 2.1，可以得到以下推论：

推论 1: 若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处 n n 阶可导，且 $f(t_0)\neq0$, 则当 $\varphi(x)\to\alpha$ 时有

$$\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt\sim f(t_0)(\varphi(x)\to\alpha).$$

推论 2：若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处 n 阶可导，且 $f(t_0)=0,f'(t_0)\neq0$, 则当 $\varphi(x)\to\alpha$ 时有

$$\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt\sim f'(t_0)\left[\frac{(\varphi(x)-t_0)^2}{2}-\frac{(\alpha-t_0)^2}{2}\right].$$

推论 3：若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处 n 阶可导，且 $f(t_0)=f'(t_0)=0,f''(t_0)\neq0$, 则当 $\varphi(x)\to\alpha$ 时有

$$\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt\sim\frac{f''(t_0)}{2!}\left[\frac{(\varphi(x)-t_0)^3}{3}-\frac{(\alpha-t_0)^3}{3}\right].$$

在定理 2.1 中，若取 $\alpha=0,t_0=0$，则可以得到以下结论：

若函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处 n 阶可导，且 $f(t_0)=f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{n-1}(t_0)=0$，$f^{(n)}(t_0)\neq0$, 则当 $\varphi(x)\to0$ 时有

$$\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt\sim\frac{f^{(n)}(0)\varphi(x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

; $\int_0^{\varphi(x)}\sin tdt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$; $\int_0^{\varphi(x)}\tan tdt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$; $\int_0^{\varphi(x)}\arcsin tdt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$;

$\int_0^{\varphi(x)}\arctan tdt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$; $\int_0^{\varphi(x)}\left(e^t-1\right)dt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$;

V $\int_0^{\varphi(x)}\ln(1+t)dt\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$;

$\int_0^{\varphi(x)}(1-\cos t)dt\sim\frac{1}{6}\varphi^3(x)$;

$\int_0^{\varphi(x)}[(1+t)^\alpha-1]dt\sim\frac{\alpha}{2}\varphi^2(x)$.

特别的，当 $\varphi(x)=x$ 时，可以得到下面引理：

引理：若函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处 n 阶可导，且 $f(t_0)=f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{n-1}(t_0)=0$，$f^{(n)}(t_0)\neq0$, 则当 $x\to0$ 时有 $\int_0^x f(t)dt\sim\frac{f^{(n)}(0)\varphi}{(n+1)!}x^{n+1}$.

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan tdt}{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{1+t}-1dt}$.

解：在 $\int_0^{x^2}\arctan tdt$ 中，$\varphi(x)=x^2$，当 $x\to0$ 时，$\int_0^{x^2}\arctan tdt\sim\frac{1}{2}x^4$；在 $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{1+t}-1dt$ 中，$\varphi(x)=1-\cos x$，当 $x\to0$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{1+t}-1dt\sim\frac{1}{4}(1-\cos x)^2\sim\frac{1}{16}x^4$

所以极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan tdt}{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{1+t}-1dt}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{\frac{1}{16}x^4}=8.$$

定理 4: 设 $f(x),g(x)$ 为 $x\to0$ 时的无穷小量，$f(x)\sim g(x)$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，则有

$$\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x g(t)dt.$$

证明：因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，所以

$$\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x g(t)dt.$$

例 4（1）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\tan^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

解：由于当 $x\to0$

时，$\sqrt{1+x^4}-1\sim\dfrac{x^4}{2},\ln(1+t)\sim t$ ，

则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}tdt}{x^4/2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x\cdot2\tan x\cdot\sec^2 x}{2x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^3 x}{2x^3\cos^5 x}=1.$$

定理 5[8] 若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=M(M\neq0),$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，则

$$\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\sim\int_0^x M\cdot g(t)dt\ .$$

例 5（1）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x\ln(2+t)dt)^2}{\int_0^x te^{2t}dt}$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}\ln(2+x)=\ln2,\lim\limits_{x\to0}e^{2x}=1,$ 所以当 $x\to0$ 时，

$$\int_0^x\ln(2+t)dt\sim\int_0^x\ln2dt=x\ln2$$

，$\displaystyle\int_0^x te^{2t}dt\sim\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$ ，

所以

$$\lim_{\to}\frac{\int\ \ln(2\quad t)dt)}{\int\ te\quad dt}=\lim_{x\to0}\frac{(x\ln2)^2}{x^2/2}=2(\ln2)^2\ .$$

2.3 极限中含加减因子的等价无穷小替换

设 $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 均为同一变化过程中的无穷小量 .

定理 6[9]：设 $\alpha\sim\alpha_1$ $\beta\sim\beta_1$ ，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=m$ ，若

(1) 当 $m\neq1$ 时，$\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$ ；

(2) 当 $m\neq-1$ 时，$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$.

推论 4：设 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1,\gamma\sim\gamma_1,\mu\sim\mu_1,$ 且 $\lim\dfrac{a\alpha}{b\beta}\neq\pm1,\lim\dfrac{c\gamma}{d\mu}\neq\pm1,a,b,c,d$ 为常数，则当 $\lim\dfrac{a\alpha_1\pm b\beta_1}{c\gamma_1\pm d\mu_1}$ 存在时，有 $\lim\dfrac{a\alpha\pm b\beta}{c\gamma\pm d\mu}=\lim\dfrac{a\alpha_1\pm b\beta_1}{c\gamma_1\pm d\mu_1}.$

证明：因为

$$\lim\frac{a\alpha}{b\beta}=\lim\frac{a\alpha_1}{b\beta_1}\neq\pm1\Rightarrow\lim\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\pm1\right)=\lim\left(\frac{a\alpha_1}{b\beta_1}\pm1\right)\neq0$$
$$\Rightarrow\frac{\lim\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\pm1\right)}{\lim\left(\frac{a\alpha_1}{b\beta_1}\pm1\right)}=1$$

所以有 $\dfrac{a\alpha}{b\beta}\pm1\sim\dfrac{a\alpha_1}{b\beta_1}\pm1.$

同理可证 $\dfrac{c\gamma}{d\mu}\pm1\sim\dfrac{c\gamma_1}{d\mu_1}\pm1.$

从而有

$$\lim\frac{a\alpha\pm b\beta}{c\gamma\pm d\mu}=\lim\frac{\frac{a\alpha}{b\beta}\pm1}{\frac{c\gamma}{d\mu}\pm1}\cdot\frac{b\beta}{d\mu}=\lim\frac{\frac{a\alpha_1}{b\beta_1}\pm1}{\frac{c\gamma_1}{d\mu_1}\pm1}\cdot\frac{b\beta_1}{d\mu_1}=\lim\frac{a\alpha_1\pm b\beta_1}{c\gamma_1\pm d\mu_1}.$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x^2-\sin3x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x^2}{\sin3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\neq1$ ，由定理 3.1 得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x^2-\sin3x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-3x^2}{x^2}=-1$.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{e^{2x}-1}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+(1-\cos x)}{e^{2x}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{x^2}{2}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x}{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

定理 7[10]：设 α,β 为同一变化过程中的无穷小量，且 $\beta=o(\alpha)$ ，则 $\alpha\pm\beta\sim\alpha.$

注：两无穷小量代数和与较低阶无穷小量等阶．可将此结果扩展为多个无穷小量，如果有多个无穷小量都是比其中一个无穷小量高阶的无穷小量，则他们的代数和与其中这个无穷小量等阶。

推论 5：若 $x\to x_0$ 时， $f(x),g(x),h(x)$ 都是无穷小量，且 $f(x)=o(g(x)),g(x)\sim h(x),$ 则 $g(x)\sim[h(x)+f(x)](x\to x_0)$.

证明：因为 $f(x)=o(g(x)),g(x)\sim h(x),$ $(x\to x_0)$ ，于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=1.$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)+f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1+0=1$$

例 8（1）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+\arcsin^3 x-\ln(1+x^4)}{\sqrt{\cos x}-1+\tan3x}$

解：当 $x\to0$ 时，

$\arcsin^3 x\sim x^3,\ln(1+x^4)\sim x^4$ ，$\tan3x\sim3x$

$\sqrt{1+\cos x-1}=\sqrt{1+\cos x-1}$

$-1\sim\dfrac{1}{2}(\cos x-1)\sim\dfrac{1}{4}x^2$.

显然 $\arcsin^3 x$ 与 $\ln\left(1+x^4\right)$ 均为比 $2x$ 高阶的无穷小，而 $\sqrt{\cos x}-1$ 为比 $\tan 3x$ 高阶的无穷小量，由定理易知：

$$2x+\arcsin^3 x-\ln\left(1+x^4\right)\sim 2x$$

，$\sqrt{\cos x}-1+\tan 3x\sim\tan 3x\sim 3x$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\arcsin^3 x-\ln(1+x^4)}{\sqrt{\cos x}-1+\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解：在求此极限时，不能用等价无穷小量 $\sin x\sim x,\tan x\sim x$，在求极限时，只有对极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小量来替代．而在极限式的和、差运算中应用等价无穷小量代换时，经常会丢失高阶无穷小量，而引起错误。

解法一 由泰勒公式可知：

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

这里 $o(x^3)$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，于是

$$\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

解法二 当 $x\to 0$ 时，有 $\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

解法二说明了求“$\frac{0}{0}$”型的极限时，分子或分母是连乘或连除的形式时，可以把分子或分母的某个函数用其等价无穷小来代换，证毕。

2.4 级数敛散性的等价无穷小替换

定理 8[11]：设 $f(x),g(x)$ 为 $x\to\infty$ 时的同号无穷小量，且 $f(x)\sim g(x)$，则当 $x\to\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(n)$ 有相同的敛散性．

例 9 求极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{n+nk}{n^3+\frac{1}{\sqrt{k}}}$．

解：令 $f(n,k)=n+nk$

$$g(n,k)=\frac{1}{n^3+\frac{1}{\sqrt{k}}}\sim\frac{1}{n^3}(k\to\infty,n\to\infty),$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n+nk}{n^3+\frac{1}{\sqrt{k}}}=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n+nk}{n^3}=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

等价无穷小量代换是极限运算中的一个重要方法．在高等数学的教学中，利用等价无穷小量代换计算极限，主要是指在求解有关无穷小的极限问题时利用等价无穷小量的性质、定理施行的等价无穷小量替换的计算方法，通常与洛必达法则一起使用，目的是使解题步骤简化，减少运算错误，提高教学质量和效果。

参考文献：

[1] 龚萍．等价无穷小的性质及其运用推广 [J]. 河北理工大学学报（自然科学版），2013.08.103-105.

[2] 郭竹梅，张海燕．等价无穷小的性质及其在极限运算中的应用 [J]. 河北北方学院学报（自然科学版），2010.12.15-19.

[3] 周宏辉．等价无穷小在求未定极限中的应用 [J]. 中国校外教育，2008（80）.1127-1128.

[4] 杨美香．关于等价无穷小的代换法求极限探讨 [J]. 科技资讯 .2014（30）.175-177.

[5] 郑烨．例说等价无穷小在求函数极限中的应用及推广 [J]. 漯河职业技术学院学报 .2011.10.88-89.

[6] 同济大学数学教研室．高等数学（上册）[M]. 高等教育出版社，1996.

[7] 杨爽．一类变上限积分的等价无穷小量研究 [J]. 科技息，2010,23(04):117.

[8] 杨春林，张传芳．变上限积分的等价无穷小 [J]. 高等数学究，2004(06):43—44.

[9] 刘敏，储亚伟．等价无穷小在极限运算中的应用 [J]. 阜阳师范学院学报，2005(3):71—73.

[10] 高进青，赵国伟．无穷小量的等价代换在代数和的极限中的应用 [J]. 吉林省教育学院学报，2010(10):134.

[11] 尤晓琳，振芬．极限的等价无穷小替换研究 [J]. 河南教育学院学报（自然科学版），2011(3):5—6.

作者简介：

汪敏庆（1992.10-　），男，湖北黄冈人，硕士研究生，讲师，研究方向：非线性泛函分析。