

基于可视化在高等数学教学中的研究与实践

——以“微元法求曲顶柱体的体积”片段教学为例

陆晓娟

(桂林信息科技学院 广西 桂林 541004)

【摘要】求曲顶柱体体积是《高等数学》中的重难点之一，其应用性很强。文章基于实用性原则设计教学过程，通过挖掘生活中与课程息息相关的实例，使高等数学课程的教学更加贴近生活实际，同时运用 Geogebra 绘制 3D 图像，借助多媒体向学生展示立体图形的形成过程，并进行切片分析，将数学可视化有机融合到高等数学教学中。随着预设的探究性问题的逐渐推进，结合引导式教学方法引导学生进行探究学习，并通过恰到好处的点拨，将让学生在专业学习的同时，感受到高等数学的趣味性和实用性，破解求曲面柱体体积的教学难点。让学生认识数学的应用价值、理性价值与审美价值，培养探究问题，严谨务实的科研态度，培养正确的三观和辩证思想，有理想、有抱负，热爱祖国，有振兴中华的使命感和责任感。

【关键词】Geogebra；高等数学；曲顶柱体；数学可视化；课程思政

Research and practice based on visualization in higher mathematics teaching

——Take the teaching of “Calculating the volume of the top column by the Element Method” as an example

Xiaojuan Lu

(GuiLin Institute of Information Technology, Guilin, Guangxi, 541004)

[Abstract] Finding the volume of the top cylinder is one of the important difficulties in Higher Mathematics, and its application is very strong. This paper designs the teaching process based on the principle of practicality, and makes the teaching of higher mathematics more close to the reality of life by mining the examples closely related to the course in life. At the same time, Geogebra is used to draw 3D images, the formation process of three-dimensional graphics is shown to students with the help of multimedia, and slice analysis is carried out to organically integrate mathematical visualization into higher mathematics teaching. With the gradual advancement of pre-set inquiry questions, combined with guided teaching methods to guide students to explore learning, and through appropriate calls, students will not only learn professional knowledge, but also feel the interest and practicality of higher mathematics, and solve the teaching difficulties of finding the volume of curved columns. Let the students understand the applied value, rational value and aesthetic value of mathematics, cultivate the attitude of exploring problems, rigorous and pragmatic scientific research, cultivate the correct three views and dialectical thinking, have ideals and aspirations, love the motherland, and have the sense of mission and responsibility to revitalize China.

[Key words] Geogebra; Advanced mathematics; Curved top column; Mathematical visualization; Curriculum ideology and politics

1 引言

可视化教学，就是在教学过程中利用图形、图像、动画、视频等视觉表征手段和视觉认知辅助媒体展示教学内容，或尽可能将符合学生认知经验的教学内容经由相应的教学活动内化为学生认知结构，将抽象内容可视化，让学生充分观察、体验、发现、干预、利用这些生动可视化知识，并通过认知加工将其外化为可视化语言以促进教学过程中的知识传播和创新，同时培养学生认知能力和创新能力而进行的教学。

结合可视化教学能激发培养学生的创新型思维，增强学生的思维能力。此外，教学可视化运用范围较广，还有利于整合学科知识，促进教师教学能力的提升，在促进知识传播和知识创新，培养学生者认知情感等多方

面也具有一定的作用。由此可见，“可视化”在教学中有很大助力作用，特别对于对学生而言很抽象的数学，有效的融合可视化，对于教学的效果大有裨益。

《高等数学》课程是理工科各专业必修的主干基础课程，其有较强的逻辑性、抽象性、应用性，学习该课程有利于训练学生的抽象思维能力、逻辑思维能力和解决实际问题的能力，是开展素质教育和培养学生理性思维的重要载体之一，而求曲顶柱体的体积是高等数学中应用性较强的内容之一，其主要涉及的是微积分相关知识，而微积分是人类历史上伟大思想成就之一，也是数学领域不可或缺的一个分支。因其极具抽象性，在计算过程中需要较强的计算能力和很好的空间想象力，如何设计符合学生认知规律的教学设计，从而引导学生更好

地理解和掌握利用微元法求曲顶柱体的体积变得至关重要。对于其抽象难度，如何攻克也显得十分必要。

设计思路：本文的课程教学，秉持“以学生发展为中心”的理念，根据任务驱动教学法“创设情境—确定问题（任务）—互动探究—巩固拓展”的基本思路，教学过程采用互动式和探究式方法由浅入深，采用通俗易懂形式讲解抽象的教学内容。从学生已有的知识背景出发，以问题为导向，以任务为主线，以学生为主体，对教学难点的教学进行精心设计，让学生在解决实际问题中去发现数学、探究数学、认识并掌握。其中对于抽象部分主要运用多媒体融入可视化的动态设计，结合启发式教学方式，运用生活实例对抽象的数学概念进行可视化且直观的展示，然后提出问题、引起兴趣、引发思考，最终让学生掌握知识的同时且对方法有深入理解，并将其理论知识应用到具体的实际问题中，激发学生学习兴趣，培养学生解决复杂问题的综合能力和高级思维能力。并且对标金课的“两性一度”要求精心挑选与设计适合学情的教学案例和教学内容，使其具备一定的高阶性、创新性、挑战性。

知识目标：进一步加深定积分概念的理解，在此基础上理解微元法，掌握微元法解决具体问题的步骤，感受到微元法的强大，通过实例，让其感受到微积分在生活中的应用之广；

能力目标：掌握基本技能，能够对几何中的问题进行抽象处理，熟练运用微元法建立几何、物理量的积分表达式并求解；

素养目标：掌握严谨性、逻辑性和条理性的数学思维方式，培养解决复杂问题的综合能力和高级思维能力，提升实际问题转化为数学问题能力。

思政目标：厚植国家情怀和使命担当，强化学生科研强国的意识，感悟科学的思维方式对科技创新的强大助力作用，从而潜移默化的激发学生求知欲，崇尚科学思维，有较强的毅力，不怕困难，具有辩证唯物主义世界观，具有处理问题的缜密性和逻辑性。

2 教学过程

2.1 创设问题情境，提出目标知识

“知识”来源于生活，同时也服务于生活。古人云：“授之以鱼，不如授之以渔”。在如今信息量巨大的时代，让学生学会分析处理问题就显得十分必要。科技改变人们的生活方式，这一点毋庸置疑。比如，当今大学生都会网购，日常都有收寄快递，而邮寄快递计费有按体积和按重量2种计算方法。对于保温杯，想知道按照哪种方式的邮费更便宜，重量很容易计算，对于计算它的体积，大家有什么办法？

探究问题一：如何计算类似于顶面是曲面的水杯这样形状的几何体的体积？

引出今天学习的主题：如何求曲顶柱体的体积？接着出第二个问题：

探究问题二：何为曲顶柱体？

2.2 展示生活实例，引入新的概念

对于“曲顶柱体”这个词，学生大多会感觉十分陌生。通过多媒体给学生展示一系列生活中的曲面柱体的图片或视频，例如神舟飞船及其内部构造元件，建筑物，陶艺作品，水利方、垃圾桶等，从而刺激学生的视觉感官，由已有的认知出发从而激发学生的学习兴趣，深深感受到数学知识在生活中的“用”，同时引导学生进入探究活动：请同学们观察这些几何体，它们都具备什么样的共同点或者有怎样的组成规律？

此时，学生可能没有办法运用数学语言准确给出曲顶柱体的定义，教师再将形象直观且常见的“水杯”切入，用生活中的曲顶柱体作为引例，逼真生动地引出曲顶柱体的概念：底是由 xOy 面上的闭区域 D ，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x, y)$ ， $f(x, y) \geq 0$ 且在 D 上连续。这种立体叫做曲顶柱体。

这样由实际生活中常见的物品出发，引出新概念。

2.3 温习旧知，引出新识

用心观察发现，日常生活中，曲顶柱体无处不在，它们大小不同，形态各异，体积也不一定相同，那么如何来计算这些曲顶柱体的体积呢？

先引导学生回忆一般情形：圆柱作为最基本的平顶柱体，只要知道其高和底面半径即可运用底面积乘以高来计算体积。

进而启发学生探究：

探究问题三：若顶面是曲面的几何体，如上述水杯它的体积又该如何求解呢？

可知，二重积分的几何意义表示曲顶柱体的体积。于是，为求杯子的体积，需建立模型，首先分析问题，把问题数学化，再者进行一定合理的假设，然后建立模型：水杯近似为一个曲顶柱体，设顶部曲面为 $z=f(x, y)$ ，积分区域为 D ，可得到积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 。问题是，这个积分怎么计算？杯子的体积是多少？

探究问题三：如何利用“微元法”求曲顶柱体的体积？

2.4 融合可视化技术，突破求解重难点

利用微元法的思想，融合动态技术将求解过程可视化，形象而具体的攻破求曲顶柱体体积的难题。

第一，用多媒体结合动态技术形象地实实在在的

展示“分割的棱柱越细，近似程度越好”。

一个曲顶柱体由 $z = y^2, y = x, y = 2, x = 0, z = 0$ 围成。为求它的体积，考虑“微元法”，将它“切割”成若干小曲顶柱体，每个小曲顶柱体可用棱柱近似代替（分割，求和，取极限）。所有棱柱的体积之和近似等于曲顶柱体的体积。用动态的分割让学生看到，分割的棱柱越细，其近似程度越好。这部分使用 geogebra 绘制 3D 动画，全方位展示几何体。该部分脚在 geogebra 共享资源基础上自行进行修改处理。

第二，模拟分割过程，感受近似过程。

对一般的曲顶柱体，通过动态技术演示用小柱体近似替代小曲顶柱体，并将分割过程分步，先切“片”，每一片的体积用颜色变化做区分。演示每个“切片”的变化过程。这部分使用 geogebra 绘制 3D 动画，全方位展示几何体，突破平面图像需要学生具备较强的空间想象能力的限制，所有层次的学生都能通过 3D 图像深刻理解表达式的来龙去脉，而不是仅仅浮于表面。数学，是表达世界的工具，而不是脱离实际的产物。在科技发展迅速的当下，结合可视化，让抽象的知识变得形象化，让学生更加容易理解。

顶部曲面的方程 $z = f(x, y)$ ，它的几何意义为平面内一点 (x, y) 的“高”。

首先对几何体“切片”，切 x 轴，每片的厚度的为 dx 。每个“切片”体积 $V_i (i = 1, 2, \dots, n) =$ 面积 $S \times$ 厚度 dx ，第一个切片的体积 V_1 为面积 $S \times$ 厚度 dx ，第二个切片的体积 V_2 为面积 $S \times$ 厚度 dx ，第三个切片的体积 V_3 为面积 $S \times$ 厚度 dx ，…… $V = \sum_{i=1}^n V_i$

总体积为所有“切片”体积之和，即在分割足够“细”（即极限）条件下求和，求和号改写为积分号，即 $V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n S_i dx = \int S dx$ 。

第三，确定底面积 S 。

可看到，每个切片的体积不尽相同，是因切片的面积不尽相同。于是选定其中一个切片，“切片”的面积为 $yo z$ 平面内若干个矩形的面积之和。而这正是定积分的几何意义。曲线 $f(x, y)$ 表示矩形的高， dy 表示矩形的宽， $f(x, y) dy$ 表示矩形的面积，故切片面积为这样一个定积分 $\int f(x, y) dy$ 。

第四，确定积分的上下限。

内层积分的上下限，表示 y 取值范围（长度），这些“切片”的 y 的取值范围并不相同。但是，它们有一个共同点，就是“长度”满足方程 $y = -x + 5.5$ 。于是积分上下限为 0 到 $-x + 5.5$ 。这提示我们累次积分上下限的确定，需要观察投影区域。外层积分

上下限表示最左到最右“切片”，即 0 到 $-x + 5.5$ 。故曲顶柱体的体积可表示为：

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n S_i dx = \int S dx = \int_0^{11/2} \left[\int_0^{-x+5.5} f(x, y) dy \right] dx$$

以上就是利用微元法的思想，找到求曲顶柱体的方法——二重积分，并且介绍了二重积分化为累次积分的方法。这就是二重积分在直角坐标系下的计算方法。

因为其具有一定的抽象性，空间想象力不好的学生很难理解，但若在求解过程中借助多媒体将求解过程可视化，可让原本抽象的知识变得具体形象化，这让不同认知的学生都能理解其本质，而不单单是会计算。

基于可视化在数学教学过程中的探索任重道远，设计出符合学情的教学设计也十分必要。

2.5 分析归纳总结，融入思政教育

(1) 总结求曲顶柱体的体积的步骤（直角坐标系下二重积分为化累次积分）

第一，由上述可知，二重积分求解要关注积分区域，先确定 x 型或 y 型。确定的办法与求平面图形面积里讲解的一样。以 x 型为例，如图 1，切割 x 轴，可以看到切片最左和最右为 a, b ，故外层积分上下限为 a, b 。这一步，相当于对土豆“切片”。

于是，二重积分变形为：

$$\iint_D \varphi(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int \varphi(x, y) dy \right] dx$$

第二，内层积分 $\int \varphi(x, y) dy$ 表示“一个切片”的面积，需要确定 y 的取值范围。从俯视图看这个“切片”，即如图 2 中 AB ，选定该切片后，相当于 A, B 横坐标已知，均为 x ，代入 A, B 所在的曲线，得 A, B 的坐标分别为 $(x, f(x)), (x, g(x))$ ，故内层积分区间为 $f(x)$ 到 $g(x)$ 。所以，二重积分变形为

$$\iint_D \varphi(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) dy$$

在课程讲授过程中，要特别注意：

(2) 选择切割 x 轴或者 y 轴，除了跟积分区域有关，还跟被积函数有关，主要积分计算时的问题。后续有例题做讲解。

(3) 通俗的说法是将曲顶柱体切成片，然后再切成丝，像切“土豆丝”一样，让学生更直观的与生活实例联想，化抽象为具体。

课程进行到这里，教师可适当的将课程思政融入到课程教学中，《高等学校课程思政建设指导纲要》指出，让学生通过学习掌握事物发展规律，通晓天下道理，丰富学识，增长见识，塑造品格，努力成为德智体美劳全

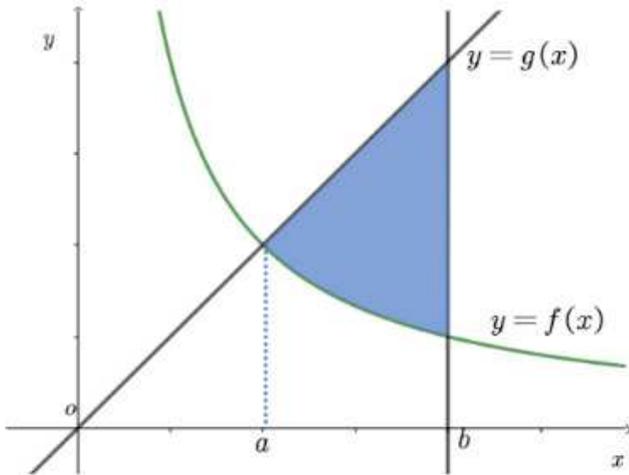


图 1

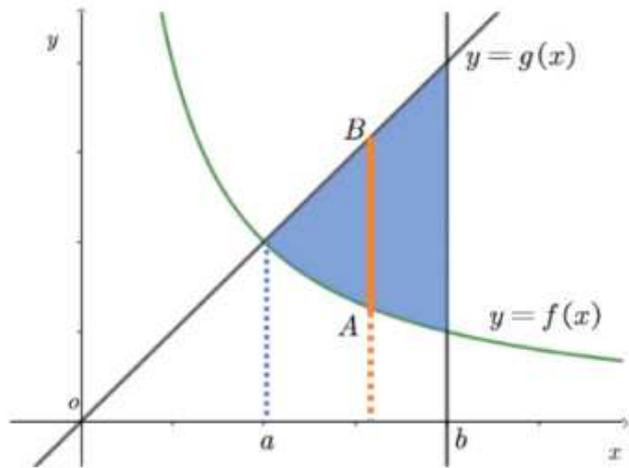


图 2

面发展的社会主义建设者和接班人。对于理科课程，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感，激发学生科技报国的家国情怀和使命担当^[4]。

同学们在解决问题的时，要善于转换角度，认真分析，便于找到解决问题的方法，生活亦是如此，当遇到事情进退两难的时，不妨换个角度去思考分析问题，或许会收获不一样的风景。“正难则反”这是数学证明题常用的反证法，对于解决问题也是屡试不爽。在教学手段上，引导学生去感受、去体验、去探索生活处处有数学。再者，在日常生活中，切忌不要“不以善小而不为，不以小恶而为之”，通过课程思政，使学生具有在现实生活中善于发现、捕捉生活情趣的能力，具有感受美好生活的能力，从而使学生能够融入生活，享受生活，陶冶生活。

2.6 课后总结升华知识，内容拓展感受真知

因为求曲顶柱体体积，不仅需要很强的计算能力，

还需要很好的空间想象力。如果仅通过语言描述，平面绘图，并不能使大部分学生理解接受，如空间旋转体，曲顶柱体。而多媒体的出现，结合动态技术，通过 3D 动画，数学可视化能让学生全方位观察几何体，进而理解数学表达式的意义，体会到数学是描述现实世界的工具，也是解决现实问题的有效途径。

比如导数的概念，偏导数的概念等，应尽量通过动态或立体动画直观展示，这也是培养学生空间想象力的有效方法，有助于学生理解抽象的计算公式背后的实际意义，理解数学怎样描述现实，将来在现实中遇到问题才能更好利用数学。

数学可视化，只要有创意，就还有源源不断的新作品，这对教师 and 广大学生都是有益的。

3 结束语

本节课教学设计的初衷是：贴近生活，感受数学的实用；走近学生，品味数学的乐趣；走进数学本质，见识数学的魅力。在整个教学设计中，结合丰富的教学资源，运用多媒体并融合动态技术，展示与教学内容息息相关的典型实例，让数学可视化；同时整个教学过程中，结合学生的认知让抽象的概念形象化、直观化，并重视引导学生的自主探索能力，重视学生研讨创新能力，鼓励学生各抒己见、动手实践的能力。然而一堂高效且富有创造性的课堂仅靠教学设计远远不够，这需教师全身心的投入和付出，将人格魅力融于授课中，和风细雨，润物无声，使学生在知识内化的过程中经历知识探究的过程及成功的喜悦。

参考文献：

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(下)(第七版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 徐定华, 刘单, 刘可伋. 分析数学课程的可视化教学设计探讨[J]. 大学数学, 2022, 38(04): 44-51.
- [3] 王荣亮. 基于 GeoGebra 的中职数学教学可视化设计—以《函数》章节为例[J]. 内江科技, 2022, 43(08): 56-57+107.
- [4] 中华人民共和国教育部. 教育部印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知(教高[2020]3号)[EB/OL].

基金项目：广西本科教学改革项目“大学数学可视化教学的创新与实践”(2023JGB480)。

作者简介：

陆晓娟(1993-)，女，广西全州县人，汉族，讲师。