

主题式学习：提升核心素养的有效途径

——实验与探究活动“填幻方”

王 岚

(湖北省武汉市常青第一学校 湖北 武汉 430000)

【摘要】“填幻方”(人教社数学教科书七年级上册第1章1.3节)是“有理数的加减法”的“实验与探究”课,“填幻方”主题学习活动,围绕“幻方”知识点,让学生从数学的角度去观察、思考与表达“幻方相关知识及其应用”,培养学生发现、提出、分析和解决实际问题的能力,促进学生核心素养的自然生长。

【关键词】主题式学习;实验与探究活动;数学课程核心素养;幻方

Thematic learning: an effective way to improve core literacy

—— Experiment and exploration activities “Filling magic squares”

Lan Wang

(Changqing No.1 School, Wuhan City, Hubei Province, Wuhan, Hubei, 430000)

[Abstract] “Filling Magic Square” (Human Education Society mathematics textbook seventh grade volume 1 Chapter 1 section 1.3) is the “Experiment and exploration” lesson of “addition and subtraction of rational numbers”. The learning activity of “Filling magic Square” focuses on the knowledge point of “magic square”, allowing students to observe, think and express “knowledge related to magic square and its application” from the perspective of mathematics, and cultivates students’ ability to discover, propose, analyze and solve practical problems. Promote the natural growth of students’ core literacy.

[Key words] Thematic learning; Experiment and inquiry activities; Mathematics curriculum core literacy; Magic square

1 初中数学主题学习活动是“实验与探究”的重要教学形式

主题式学习、项目式学习是“实验与探究”的重要教学形式,学习内容可以围绕一个知识点或一个知识模块,开放式地延伸。“实验与探究”强调“以问题解决为导向,整合数学与其他学科的知识 and 思想方法”,让学生经历预设、实践、合作、交流、体验、探究、反思等学习过程,积累数学活动经验,体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与现实世界之间的关联(即新课标数学课程“四基”)。让学生从数学的角度去观察、思考、表达现实世界(即数学课程核心素养“三会”),体会数学的科学价值,培养学生发现、提出、分析、解决问题的能力(即新课标数学课程“四能”),发展应用、合作、创新、实践意识和能力,促进学生核心素养的自然生长。

2 实验与探究活动的教学思路

“填幻方”(人教社数学教科书七年级上册第1章1.3节)是“有理数的加减法”的“实验与探究”课,“填幻方”主题学习活动,让学生从数学的角度去观察、思考与表达“幻方相关知识及其应用”,促进学生自主探究,培养学生发现、提出、分析和解决实际问题的能力。

3 实验与探究活动的主题

见表1,图1。

表1:活动的主题及数学原理

活动主题:填幻方	数学原理
填幻方是一种中国传统游戏。最初级的幻方是在3行3列的九宫格中,分别填写1、2、3、4、5、6、7、8、9个数字,使每一行、每一列、每一条对角线上的数字和都是相等,如图1。	幻方,广义上讲,是在一个 n 阶方阵(即 n 行 n 列方阵, $n \geq 3$, n 为正整数)中,填写 n^2 个数字(不限于正整数),使每行、每列、每条对角线上的数字和(即幻和)都相等的模型。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1

4 学情分析

见表2。

5 实验与探究活动的设计方案

见表3,图2。

“填幻方”是以有理数加法的法则与运算律相关知识应用为核心的实验与探究活动。活动涉及不同的学科,例如,“查阅幻方相关知识”和“填幻方”的实验与探究过程涉及“有理数的加减法、旋转、轴对称、方程、等差数列、逻辑推理、模型”等不同知识点模



表 2: 学生不同维度的学情分析

程度	学生的基础、起点状态和最近发展区
能力维度	学生掌握了一定的自主学习能力, 实践操作能力和数学推理的能力.
知识维度	数学知识: (1) 有理数的加减法: 本单元学习了正数、负数、有理数、有理数加减法的法则及运算律, 运用加减法运算律合理计算. (2) 方程: 小学学习了简易方程及其解法. (3) 幻方: 小学阶段已经学习了九宫格幻方、推理玩数字游戏、方格填数游戏.
活动经验维度	学生积累了一定的小组合作探究、实验活动、研学活动经验.

表 3: 活动设计

学习任务	学生活动	教师组织	活动意图
收集、整理、阅读与“幻方”相关的文献, 自主学习“幻方”相关知识, 并以“三阶幻方”为研究对象, 发现问题, 提出问题.	(1) 通过书籍和网络, 查找和阅读“幻方”的相关信息, 了解“幻方”的基本概念、历史演化、文化传承、实际应用. (2) 通过小组合作探究, 以“三阶幻方”为研究对象, 发现并提出与“三阶幻方”相关的问题.	指导学生通过阅读书籍和网络搜索, 收集“幻方”的文献, 理解“幻方”的概念. (2) 指导学生从中所收集的信息中, 分析和提取有助于解决问题的关键信息与文献. (3) 引导学生从不同的视角提出问题. (4) 引导学生从投入探究活动中的情绪情感、问题解决过程中的能力表现、小组团队协作能力和成果等四个方面进行评价. (5) 在学生遇到困难时, 教师及时给予帮助, 鼓励学生进行小组内部及小组之间的交流与合作. (6) 引导学生由简入繁从“幻方”的最初级模型“三阶幻方”入手, 用数学的眼光观察“幻方”, 并提出与“三阶幻方”相关的问题.	(1) 通过自主学习新概念, 让学生学会学习. (2) 查阅“幻方”的相关信息, 既提升学生学习“幻方”的兴趣, 也培养学生信息收集与分析处理的能力. (3) 培养学生能够用数学的眼光发现并提出现实世界中蕴含的数学问题.
探究“三阶幻方”的性质、规律及填数方法, 解决问题.	(1) 根据“问题”, 小组合作探究“三阶幻方”的性质、规律及填数方法. (2) 要使所填的数符合幻方要求, 需要学生不断实验和调试.	(1) 帮助学生解决探究过程中遇到的各种疑问. (2) 引导学生使用合适的数学方法, 探究“三阶幻方”的性质、规律和解法.	(1) 幻方是有理数的加法的法则与运算律的拓展和加深, 学生可以合作学习, 拓宽知识领域, 提升自主学习能力, 在用数学的过程中学会学习. (2) 培养学生的数观念、抽象和推理能力、模型观念, 运用数学及其他学科知识分析和解决问题, 提高分析和解决问题的能力. (3) 培养学生学会用数学思维思考现实世界的问题.
实验成果汇报与交流, 总结反思, 拓展延伸.	(1) 小组分享各自的实验成果, 介绍各自的实验设计、过程、解决困难的方法和收获. (2) 从数学的角度反思活动过程中运用的方法与知识, 并拓展延伸到其他学科领域的实际应用. (3) 课后撰写实验报告和探究活动感悟.	引导学生对实验设计方案的可行性, “幻方”相关信息获取方法的科学性、利用方程思想“填幻方”的有效性进行反思.	学生修正完善自己的实验方案, 发展反思能力.

块的数学学科知识。

“填幻方”给学生提供了一个开放性的活动任务, 学生从不同的视角提出具有开放性的研究问题, 倡导通过团队合作来解决。活动可以分为“查阅幻方相关知识”、“填幻方”、“实验成果汇报与反思”三部分: “查阅幻方相关知识”主要是学习“幻方”的基本概念、历史演化、文化传承、实际应用; “填幻方”主要调试和探究“幻方的性质, 幻方的填法和规律”;

“实验成果汇报与反思”主要是实验成果的展示与交流, 总结反思, 拓展延伸。

在实践活动设计与教学实施中, 秉持以学生为中心的基本理念, 聚焦主题, 自主选择研究任务, 提出并探索研究问题。在解决问题的过程中, 学生需要运用自己已有知识和经验, 在小组合作交流中, 创造性地解决问题。问题解决方向需要学生自己探索, 解决方案多元化, 而非有指向性的“标准答案”。教师在活动前需要分析

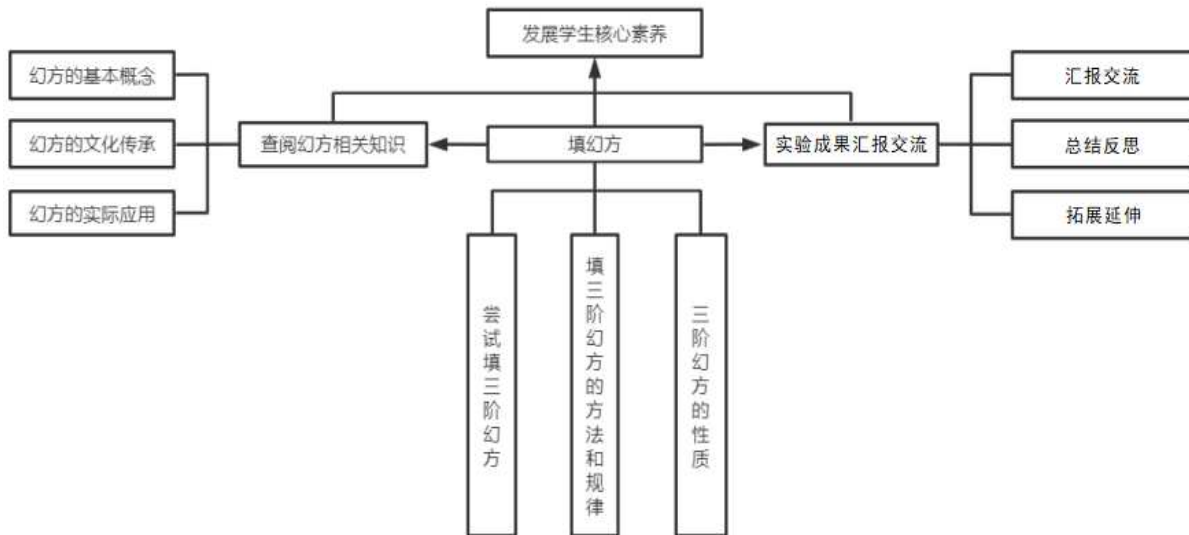


图2

学生可能遇到的困难点，在学生真正遇到困难时，采用恰当的引导策略帮助学生找到问题解决的方法。

6 实验与探究活动示例

6.1 环节一 查阅资料，自主学习“幻方”概念，发现问题，提出问题

课前，教师引导学生分组从以下几个角度查阅“幻方”的相关知识，如图3：

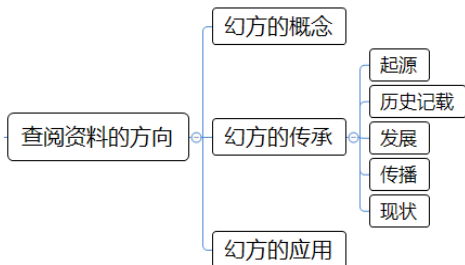


图3

课外，学生查阅相关信息，教师指导学生收集、整理、提炼、分析信息，然后分组展示成果，如图4：

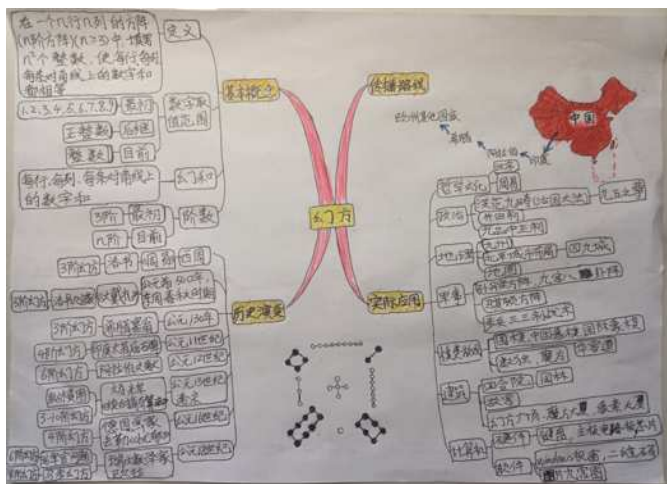


图4

在教师的指导下，学生通过小组合作探究，以“三

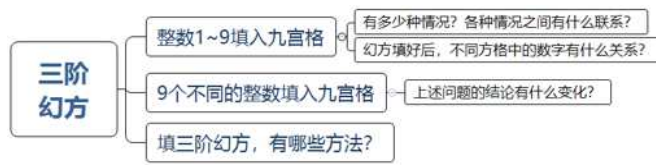


图5

阶幻方”为研究对象，从不同角度提出问题，如图5：

6.2 环节二 以问题为“向导”，合作探究“三阶幻方”，分析问题、解决问题。

6.2.1 将整数 1~9 填入九宫格

(1) 问题：有多少种情况？各种情况之间有什么联系？

学生通过小组合作，开展实验尝试、探究讨论问题，教师引导学生思考问题、回答问题（其他问题也如此）。

由图6可知，有8种情况，且这8种情况之间变换可以看作旋转或轴对称，我们后继将分别在8年级和9年级系统学习轴对称和旋转的知识。

(2) 问题：每一行、每一列、每一条对角线上的数字和是多少？9个数字的和是多少？两者之间有什么关系？

在九宫格中，分别填写整数1~9，每一行、每一列、每一条对角线上的数字和都相等，这个和即为幻和。如图7，幻和为15。我们可以发现 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45=15 \times 3$ ，即“幻和 = 所有数字的和 $\div 3$ ”。

(3) 问题：九宫格中央格子里的数字是多少？与每一行、每一列、每一条对角线上的数字和有什么关系？与9个数字和有什么关系？

九宫格中央格子里的数字，即为中心数，中心数为5。可以发现 $5=15 \div 3$ ，即“中心数 = 幻和 $\div 3$ ”，结合

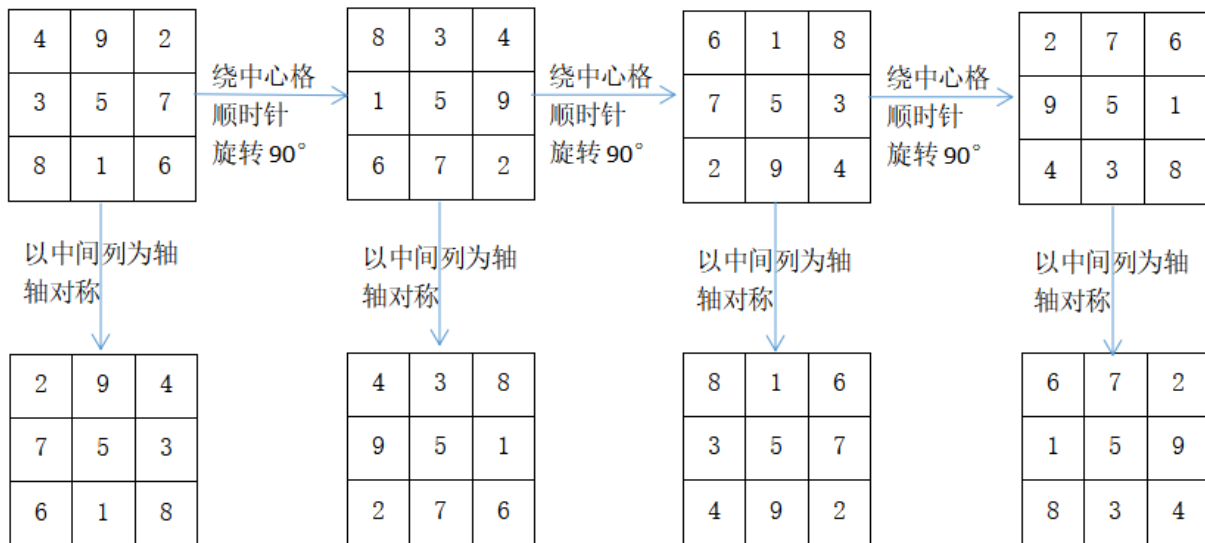


图6

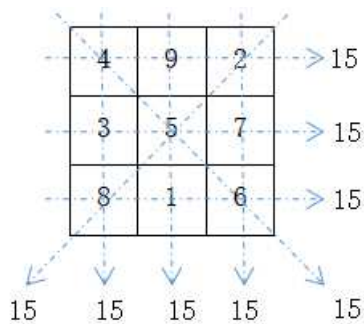


图7

上一问的结论，我们发现“中心数=9个数字和 \div 9”。

(4)问题 过中心直线上的三个数字，有什么关系？

过中心方格的直线上的三个数字，即对称轴上三个数字，如图8，分别为4、5、6；3、5、7；2、5、8；1、5、9；

这四组数字，首尾两数的和=中心数 \times 2，第2个数-第1个数=第3个数-第2个数，即三个数字构成了等差数列。等差数列的知识，我们后继将在高中系统学习。

(5)问题：9个数字中，最大的数和最小的的数的位置关系是怎样的？

如图7，9个数字中，最大的数和最小的数分别是9和1，两数在一条直线上，且在中心数的上下或左右，不在角上。

(6)问题 角上的数字和边上的数字，有什么关系？

如图8，角上的数字 \times 2=与此角不相邻的两边上的中间数字之和。

(7)问题：一个数所在的行或列或对角线中的其他两个数的和，有什么关系？

如图9，4所在的行中其他两个数为9和2， $9+2=11$ ；4所在的列中其他两个数为3和8， $3+8=11$ ；

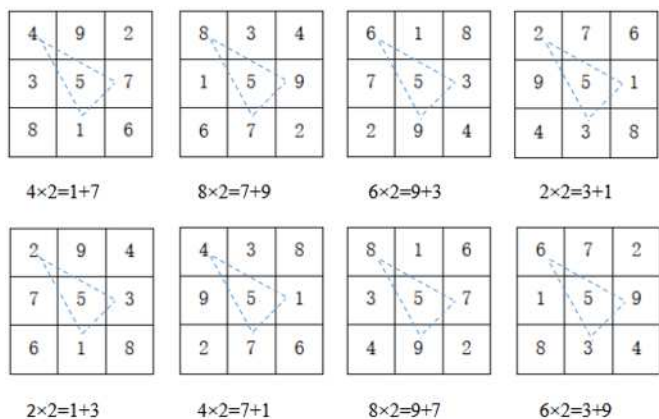


图8

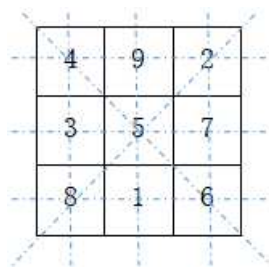


图9

4所在的对角线中其他两个数为5和6， $5+6=11$ ，三组数的和相等；另外8个数所在的行或列或对角线中的其他两个数的和也都相等。

6.2.2 将9个不同的整数填入九宫格

(1)问题：将-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4这9个数分别填入九宫格中，使得处于同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的3个数相加都相等，有多少种情况？各种情况之间有什么联系？幻和是多少？中心数是多少？6.2.1 探索出的规律是否成立？

将图10中左起第一个幻方，按照6.2.1的方法，绕中心格顺时针旋转 90° 或以中间列为轴进行轴对称

1	-4	3
2	0	-2
-3	4	-1

-3	2	1
4	0	-4
-1	-2	3

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

3	-2	-1
-4	0	4
1	2	-3

3	-4	1
-2	0	2
-1	4	-3

1	2	-3
-4	0	4
3	-2	-1

-3	4	-1
2	0	-2
1	-4	3

-1	-2	3
4	0	-4
-3	2	1

图 10

翻转，可以得到另外 7 种情况，共 8 种情况；

幻和为 0，中心数为 0，所有数字的和为 0，即“幻和 = 所有数字的和 ÷ 3”和“中心数 = 幻和 ÷ 3”成立；过中心方格的直线上的三个数字，即对称轴上三个数字，如 -1、0、1，-4、0、4，-3、0、3，-2、0、2，这 4 组数字构成等差数列；

最大的数和最小的数分别是 4 和 -4，两数在一条直线上，且在中心数的上下或左右；探究“角上的数字”与“此角不相邻的两边上的中间数字”之间的关系，得到 $1 = (-2+4) \div 2$ ， $3 = (2+4) \div 2$ ， $-1 = (-4+2) \div 2$ ， $-3 = (-2-4) \div 2$ ，即“角上的数字 $\times 2 =$ 与此角不相邻的两边上的中间数字之和”；每个数所在的行或列或对角线中的其他两个数的和，经计算，也都相等。

综上，我们发现 6.2.1 探索出的规律在本问题中仍成立。

(2) 问题：任意的 9 个整数填入九宫格中，是否可使得处于同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都相等？

将 9 个不同整数 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ，若填入九宫格中，处于同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都等于 x ，如图 11：

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图 11

由题设可得：

- $a+e+i=x$ ①
- $g+e+c=x$ ②
- $b+e+h=x$ ③
- $d+e+f=x$ ④
- $a+d+g=x$ ⑤
- $a+b+c=x$ ⑥

$$g+h+i=x \quad \text{⑦}$$

$$c+f+i=x \quad \text{⑧}$$

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=3x \quad \text{⑨}$$

$$\text{①} + \text{②} + \text{③} + \text{④} \text{得} : (a+b+c+d+e+f+g+h+i) + 3e = 4x, \\ 3x + 3e = 4x,$$

$$3e = x,$$

$$e = (a+b+c+d+e+f+g+h+i) \div 3, \quad \text{⑩}$$

∵ e 是整数，而任意 9 个整数的和不一定是 9 的整数倍，∴ 任意 9 个整数不一定满足⑩式，

由此，我们发现当 9 个整数的和为 9 的整数倍时，填入九宫格中，方可使得处于同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都相等。

追问：若 9 个整数，其和为 9 的整数倍，将这 9 个整数填入九宫格中，使同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都相等，那么 6.2.1 探索出的规律是否成立？

由 (1) 中推理过程，我们发现：“幻和 = 所有数字的和 ÷ 3”和“中心数 = 幻和 $\div 3$ ”；

$a+i=g+c=b+h=d+f=2e$ ，即“过中心直线上的三个数字，即对称轴上三个数字，构成等差数列”；

$$\text{①} + \text{⑤} + \text{⑥} \text{得} : 3a+b+c+d+e+g+i=3x$$

$$3a+b+c+d+e+g+i=a+b+c+d+e+f+g+h+i$$

$$2a=f+h$$

同理可得： $2c=d+h$ ， $2g=b+f$ ， $2i=b+d$ ，即“角上的数字 $\times 2 =$ 与此角不相邻的两边上的中间数字之和”，这条规律由于形似弹弓，所以又称为“弹弓法则”。

由①、⑤、⑥式，得： $e+i=d+g=b+c=x-a$ ，同理可得其他 8 个数所在的行或列或对角线中的其他两个数的和都相等；

综上所述，若 9 个整数的和为 9 的整数倍，将这 9 个整数填入九宫格中，可使同一横行、同一竖列、同一斜对角线上的 3 个数相加都相等，且 6.2.1 探索出的规律仍成立。

(3) 问题：图 12、图 13、图 14、图 15 中的三阶幻方，你可否补充完整？

		10

	8	10

18	8	10

	8	10
2		

	8	10
		2

图 12

图 13

图 14

图 15

图 16

经过探究，我们发现：

图 12、图 13 中的三阶幻方，有无数种情况。

图 14、图 15、图 16，我们利用前面总结出的规

律可以将其补充完整，且结果唯一，如图17、图18、图19：

18	8	10
4	12	20
14	16	6

图 17

21	8	10
2	13	24
16	18	5

图 18

4.5	8	10
13	7.5	2
5	7	10.5

图 19

因为幻方中数字的取值范围是整数，所以图19不是幻方。（思考：幻方中数字的取值范围是否可以扩充到有理数？）

6.3 环节三 总结反思，解决问题

问题：本节“填幻方”实验与探究活动，我们从中学了哪些知识？有什么感悟？

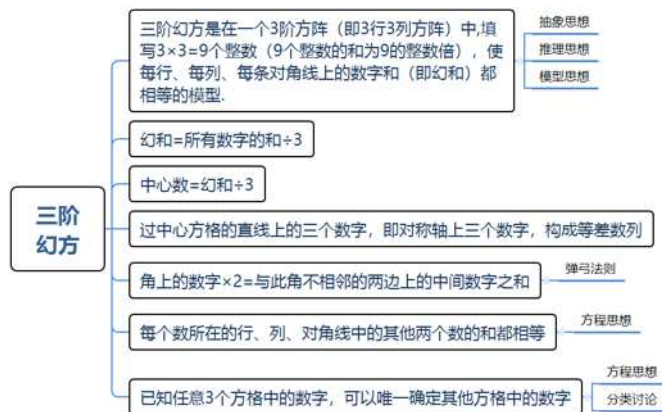


图 20

课后，有兴趣的同学可以进一步探索四阶幻方有哪些性质、规律和填法？更高阶的幻方呢？ n 阶幻方呢？

7 教学反思

本节实验与探究活动以“填幻方”为主题，紧扣两点——“主题内容的知识特点”和“学生兴趣点”，从学生原有的知识基础和实际能力出发，以核心素养为中心，将学习任务分解成三个环节，将“幻方的概念、幻方的性质、幻方的填法”等问题串成“导航线”，引导学生从数学的角度进行观察与分析、思考与表达、解决与归纳，逐步运用“有理数的加减法、旋转、轴对称、方程、等差数列、抽象思想、推理思想、模型思想”等数学知识发现、分析和解决幻方问题，促进学生理解知识的本质，构建知识的实质性联系，形成结构性的理解。

当前深化课程改革的目标指向是以学生发展为本，真正实现由知识传授向“学科育人”转化。以数学为主线的主题学习活动，强调数学与其他学科的知识 and 思想方法的整合，从数学的角度观察与分析、思考与表达、解决与阐释现实世界中遇到的问题，有利

于学生体会数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，体会科学的科学和实用价值，提升学生发现问题、思考问题、解决问题和实践应用的能力。

教师在设计主题学习活动时需要关注以下几点。

7.1 “三会”贯穿整个主题学习活动始终

发展学生的核心素养是新时代背景下贯穿整个数学课程的主线。核心素养具有整合性、综合性、交融性，这就需要数学课程与教学克服过于封闭、碎片化的倾向，具有更多的开放性。基于此，新课标提出数学核心素养——“三会”。“三会”倡导的是一种更为开放的数学课程观，指向学生生活的现实世界，是让学生获得一种面对世界、改造世界的本领和素养，其本质是人在现实世界中的数学实践能力。

7.2 问题设计要注重对学生的引导，促使学生自我提升“四能”。主题式活动中，教师应以问题为引导，并注意所设计的问题应当具有逻辑递进性、开放性、多样性的特点，使处于不同学习阶段的学生获得更好的学习体验，引导学生去发现问题、提出问题、分析问题、解决问题，促使学生自我提升“四能”，这是开展主题式活动的主要意义。

7.3 过程实施要发挥学生的主体性

主题式活动应以学习者为中心，在教师的组织和引导下，以学生为主体的自主学习、合作学习、研究性学习、动手操作、实践验证等学习活动延续始终。教师转变自身的身份，充分地融入学生当中，与学生共同探讨，共同探索，从而促进学生对数学知识的理解和进一步的探究，激发学生的主观能动性，增强学生的学习兴趣、表达能力和独立思考能力。学生在学习过程的体验、思考和感悟，不仅获得结果性知识，更重要的是，学会从多学科、多视角、多维度来分析和解决问题，实现从“学会”到“会学”的突破，从而发展核心素养。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
[2] 吴刚平. 跨学科主题学习的意义与设计思路[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(9): 53-55.

作者简介：

王岚(1977-)，女，中教高级，研究方向：中学数学主题式学习、项目式学习、跨学科学习教育活动探索和实践(武汉市学科带头人，曾获得全国优质课比赛二等奖)。