Pisco Med Publishing
2020年2月 第2卷 第2期
教育新探索 New Exploration Of Education

等价无穷小量、两类重要极限在极限计算中的巧妙、灵活应用

王积芳
（广东科技学院通识教育学院　广东　东莞　523668）

【摘　要】等价无穷小量、两类重要极限在极限计算中能够提供非常简便的计算方法，不仅要求掌握两类重要极限的、等价无穷小量分别要具备的条件和适用的范围，更重要的是巧妙和灵活的运用。核心在培养学生综合学习能力：举一反三，融会贯通；能够运用理论解决实际问题的能力。
【关键词】等价无穷小量；两类重要极限；计算技巧；培养能力

一、知识点回顾

1、无穷小量阶的比较：前提是，都是无穷小量才可以进行比较

当$x\to 0$时， (1). $\sin x\sim x$ (2). $\arcsin x\sim x$ (3). $\tan x\sim x$

(4). $\arctan x\sim x$ (5). $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

(6). $e^x-1\sim x$ (7). $\ln(1+x)\sim x$

(8). $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ (9). $(1+x)^k-1\sim kx(k\in R,\text{且}k\neq 0)$

其中公式（1）~（7）个结果证明过程略（教师在讲新课时已经加以证明，本文将对公式（8）和（9）加以证明）牢记公式且会运用公式解决实际问题

2、两类重要极限：授课时首先要加以证明两类重要极限、强调适用的条件．两类重要极限在极限的计算中也是非常重要的方法之一，它们的基本形式区别很大，适用条件各具特点．要用到相关的知识点：对数恒等；对数运算法则；对数性质等。下面通过例题解析，强化训练，熟练掌握知识要点，能够巧妙、灵活运用。

二、例题解析

例 1. 求$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$.（应用公式(7). 等价无穷小量的结果）

解：当$x\to\infty$时，$\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\sim\frac{3}{x^2}$，故

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(1+\frac{3}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{3}{x^2}=3$.

例 2.　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{(a-b)x}-1}{\sin ax-\sin bx}$ $(a\neq b)$.（（应用公式（6）. 等价无穷小量的结果））

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{(a\ \ b)x}-1}{\sin ax\ \ \ \sin bx}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{(a\ \ b)x}-1}{2\cos\frac{a+b}{2}x\sin\frac{a-b}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{a+b}{2}x}\bullet\lim_{x\to 0}\frac{e^{(a-b)x}-1}{2\sin\frac{a-b}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a-b)x}{2\cdot\frac{(a-b)}{2}x}=1$$

例 3.　证明：$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}(x\to 0)$（证明公式（8）. 等价无穷小量的结果）

证明：∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

∴原命题得证，即二者等价。

例 4.　证明　$(1+x)^k-1\sim kx(k\in R,\text{且}k\neq 0,\text{当}x\to 0)$（证明公式（9）. 等价无穷小量的结果，实际上是 8. 等价无穷小量公式的推广）

证明：分析：只要证明$(1+x)^k\sim kx\ (k\in R\text{且}k\neq 0,x\to 0)$即可

∵，当 y ＞ 0 时， $y=e^{\ln y}$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{kx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k\ln(1+x)}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

=1　∴　原命题得证。

例 5.　计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}+x\right]$

解：原式 = $\lim\limits_{x\to\infty}(-x)(\left[(\frac{6-x}{-x})^{\frac{1}{3}}-1\right]$ = $\lim\limits_{x\to\infty}(-x)(\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}(-x)\frac{1}{3}(-\frac{6}{x})=2$

（灵活、巧妙运用公式（8）、公式（9）的等价无穷小量的公式及其推广公式解决实际问题）（这个例题看上去很复杂，经过恒等变形、即可运用推广公式解决问题巧妙、灵活运用等价无穷小量计算极限的简便方法，将复杂的问题简单化了！

例 6.　$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

解：令$y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$，则$\ln y=\frac{1}{x}\ln(e^x+x)$

于是

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln e^x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}}$$

$$=1+1\cdot\ln e=2$$

即$\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}y\right)=2$　　即$\lim\limits_{x\to 0}y=e^2$　　即$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

例 7.　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：令$y=\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，则$\ln y=\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}$

于是

$$\lim_{x\to 0}(\ln y)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)\cdot\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)\cdot\ln e=\ln\sqrt[3]{abc}$$

即$\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=\ln\sqrt[3]{abc}$,　　即$\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}y\right)=\ln\sqrt[3]{abc}$,　　故$\lim\limits_{x\to 0}y=\sqrt[3]{abc}$

即

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{abc}$.

总之，讲授任何知识点，都是在不断的启发学生的逻辑思维能力，重在培养学生综合学习能力方面下功夫：举一反三，融会贯通；能够运用理论解决实际问题的能力！

作者简介：

王积芳，1967 年 11 月生，女，汉族，广东广州，副教授，理学学士，专业：数学教育。