Pioneer Med Publishing
2020 年 6 月 第 2 卷 第 6 期
教育新探索 New Exploration Of Education

探索数“e”之迷

吴章兴
（福清华侨中学　福建　福清　350300）

【摘　要】无理数 e 这个稀奇古怪的数，无时无刻不在你身边，它是高中数学中一颗明珠，更是自然界的密码。
【关键词】常用对数；自然对数；极限；复利；超越数

2019 年版高一数学必修 1“对数”这节中，我们学习了常用对数和自然对数。但在生活中对数据处理时常选择的对数是自然对数而不是常用对数。那么这么奇怪的无理数“e”为底数的对数反而比以 10 为底的对数更“吃香呢”？为什么呢？

一、人类在对数计算时对无理数 e 的引进

公元 17 世纪随着天文望远镜的出现，科学家们都热衷于研究天文运动，纳皮尔就是其中的一个代表，刚开始他发明对数初衷是为了简化对天文数据的计数 ---- 我们知道这个事实：指数的乘法可以转化为其对应的加法计算，因此他想将每个正实数 K 表示为某个特定的正实数 X 的幂即要得到这个式子：$K=X^n$。他的研究过程如下：若 $K=X^n, P=X^m$ 则 $K\cdot P=X^{m+n}$，即 K,P 乘法变成了相应的指数 m,n 的加法。故他先编制一个表，列出指数（即对数） n 与幂（即真数） K，底数 X 之间的对应关系即：$K=X^n$。发现：以 10 为底数的真数跳跃太大了，假如 $10^0=1$，$10^1=10$，明显发现：幂的值 1 过了就是 10，而它们之间的 2, 3, , ……8, 9 都没有。接着从 10 跳到了 100，再从 100 跳到 1000，跨度就变得更大了。我们知道，数据跨度越大，误差也就越大，要克服这个缺点，最好使表中相邻两个真数取较接近，所以应当取底数 a 接近于 1。当然你也可以自己编制一个以 $a=1.01$ 为底数的对数表，列出以 $n=1,2,3,4,\cdots$ 为指数的所有的幂，用接近于 1 的 $a=1.01$ 为底编制的对数表要比 10 为底的更优越。但是按上述的方法求出来的对数的数值都偏大，为了解决这个问题，纳皮尔做法是：将所有的对数缩小同一个倍数就解决了，考虑到这个式子：底数 $a=1.01=1+\frac{1}{100}$，因此将所有的对数都除以 100，也就是取 $0.01\log_{1.01}N$ 代替 $\log_{1.01}N$，这样做的好处在于：对数为 1000 的幂（不妨记为 a_3） $a_3=1.01^{1000}$ 的对数就变成了 1，数据的误差几乎变为零，而被替代后的 $0.01\log_{1.01}N$ 恰是以 a_3 为底的对数，即取 $a_3=1.01^{1000}$ 来作为对数的底数。一般地，结合高中极限的知识，考虑 $a=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 作为对数的底，当然 n 越大精度越高，数据就越好。

二、$e=2.71828\cdots$ 是何方神圣？

接下来，我们来设置一个问题：当 $n\to\infty$ 时，求 $a=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限。

解的过程参考如下：

$$a=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^0 1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0+C_n^1 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+C_n^2 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n 1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{n^2-n}{2!\cdot n^2}+\frac{n^3-3n^2+2n}{3!\cdot n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n^n}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=2.71828\cdots\cdots$$

由此可看出当 n 的值无穷增大时，a 无限接近于 $e=2.71828\cdots\cdots$。

上面的论述是纳皮尔通过对数表的研究来阐述自然对数 e 是怎么来的，虽然他当时在编制对数表时没有明确地提出自然对数的概念，但是他开始编制不是用以 10 为底的常用对数表，他是以 0.999 为底数编制的对数表，这个从本质上接近于自然数表，只是后来为了计算便捷，而是采用了“换底公式”将对数表改成了以 e 为底数的自然对数表。

三、数 e 的来头不小

在现实生活中，我们经常会用到数 e！约公元前 1710 年古埃及人计算利息的一个问题：若某人准备以年息为 30% 方式贷钱给别人，问此人何时连本带利会翻一番呢？此问题相当于如下数学问题：

解指数方程：$(1+0\cdot3)^x=2$

此类计算银行存钱的复利问题至今我们仍会遇到。设本金为 1，则以后每年的本利和等价于如下的等比数列：

1.3，1.32，1.33，1.34，1.35，1.37，…。

因此问题换为：若按每半年复利一次计算，则第一年的本利和为 $\left(1+\frac{0.3}{2}\right)^2=1.3225$，

比一年复利一次多了点；若按每个季度复利一次计算，则第一年的本利和为 $\left(1+\frac{0.3}{4}\right)^4=1.335469140625$，

比每半年复利一次又多了点；若按每个月复利一次计算，则第一年的本利和为 $\left(1+\frac{0.3}{12}\right)^{12}=1.34488882424629$，

比一季度复利一次又多了点；若按每天复利一次计算，则第一年的本利和为 $\left(1+\frac{0.3}{365}\right)^{365}=1.34969248800768$，

比每月复利一次又多了点。依次类推按每时、每分、每秒进行复利计算，第一年的本利和分别如下：

1.349851873、1.34985769424、1.34985862202。

由上述的计算我们不难发现：若年率一定，按分期复利计算，随着期数的增加，本利和也会缓慢地增大；但是无论期数如何增加，本利和总不会无限制地增大，而是有一个“界线”（如 1.34985），所求的值永远超越不了。这个界线即为时时刻刻都在按照复利计算时第一年的本利和，用数学语言来表达就是当期数 n 趋向无穷大时，求第一年本利和的极限。具体推导过程可参照如下：

设期数为 n，按照年息为 30% 计算时，得到第一年的本利和为 $\left(1+\frac{0\cdot3}{n}\right)^n\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^{0.3n}$，又由于 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182818284\cdots$，所以会得到第一年的本利和的极限为 $e^{0.3}=1.3498585351801\cdots\cdots$。

当然我们在赞赏古埃及人的智慧的同时，并不知道他们当时是否真的考虑过连续复利的问题，但是可以肯定的是，他们肯定不知道 e 这个无理数的存在。到了 1683 年，才由数学家雅各·伯努利在计算连续复利时，意识到这类问题必须从计算 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，当 $n\to\infty$ 时的极限来处理，但是美中不足的是伯努利只估计出这个极限是大约在 2 和 3 之间。直到数学家欧拉利用无穷级数的发现：$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots$

人类才首次计算了自然数 e 的小数点后 18 位的近似值，而且利用连分数来证明 e 是个无理数。再到 1873 年，法国著名数学家埃尔米特证明了 e 是一个超越数，这些结论明显是对无理数 e 的研究锦上添花！

参考文献：

[1] 张玉琳著《超越数 π 和 e 的研究》1999.4，安徽农业技术师范学院学报 .

[2] 法布尔《昆虫记》第九卷 .