

文化视角下的高考创新题研究

——以“高斯函数”为例

蒋倩

(广西师范大学数学与统计学院 广西 桂林 541004)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出,要强调数学与生活以及其他学科的联系,提升学生应用数学解决实际问题的能力,同时注重数学文化的渗透。高斯函数是一个特殊且重要的函数,在数学竞赛试题中屡见不鲜,在近几年高考试题中也频频出现,涉及的问题颇具思考性和挑战性,高斯函数中既蕴含了深厚的数学文化和醇厚的数学味道,也是考查学生数学创新能力和数学灵气的极好素材,值得高度重视。本文旨在介绍高考题中高斯函数的考查,挖掘高斯函数与奥林匹克数学竞赛、高等数学之间的联系以及数学家高斯在其他领域的成就,以期为一线教师在新授课备课以及讲授时提供一定的理论指导和参考。

一、试题呈现

(一) 试题回顾

(2010年陕西卷理科第10题)某学校要召开学生代表大会,规定各班每10人推选一名代表,当各班人数除以10的余数大于6时再增选一名代表。那么,各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数)可以表示为()。

$$A.y=[\frac{x}{10}] \quad B.y=[\frac{x+3}{10}] \quad C.y=[\frac{x+4}{10}] \quad D.y=[\frac{x+5}{10}]$$

(二) 试题解析

本题的考查高斯函数的定义,可用以下两种方法解答。

解法一:直接探求法。

设 $x=10m+n(m \in \mathbb{N}, 0 \leq n < 10)$,

$$\text{当 } 0 \leq n < 6 \text{ 时, } y=[\frac{x+3}{10}]=[m+\frac{n+3}{10}]=m=[\frac{x}{10}];$$

$$\text{当 } 6 \leq n < 10 \text{ 时, } y=[\frac{x+3}{10}]=[m+\frac{n+3}{10}]=m+1=[\frac{x}{10}]+1.$$

综上所述,本题选择B选项。

解法二:特殊值验证与排除法。

假设班级总人数为16人,应推选1名代表。

$$\text{当 } x=16 \text{ 时, } [\frac{16}{10}]=1, [\frac{16+3}{10}]=1, [\frac{16+4}{10}]=2, [\frac{16+5}{10}]=2. \text{ 排除C, D两项;}$$

$$\text{当 } x=17 \text{ 时, } [\frac{17}{10}]=1, [\frac{17+3}{10}]=2. \text{ 排除A项; 综上所述, 本题选择B选项。}$$

(三) 试题赏析

本题基于现实生活情境,考查了高斯函数的定义以及分类讨论思想。学生需要在明晰高斯函数的定义的基础上进行分类讨论。充分利用高斯函数的定义,从定义出发来尝试解决问题,我们可以发现,与高斯函数有关的问题,由于在不同的区间取整之后结果不一样,所以最终都会变成区间分类的问题。本题作为高考数学的选择题,学生可以灵活选取特殊值代入法或者直接探求法进行解题。

二、基于数学史的试题文化内涵分析

高斯函数是数学竞赛和高考的热点内容,能够很好的将高等数学与高考数学结合起来,考查试题新颖灵活,分析试题数学文化内涵,有助于教师更好的将数学史融入数学教学,发挥数学史应有的育人价值。

(一) 知识来源——高斯函数的由来

约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss),德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家,近代数学奠基者之一。

高斯一生成就极为丰硕,以他名字“高斯”命名的成果高达110个,和阿基米德、牛顿、欧拉并列为世界四大数学家。他对数论、代数、统计、分析、微分几何、大地测量学、地球物理学、力学、静电学、天文学、矩阵理论和光学皆有贡献。

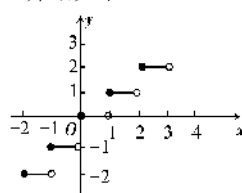
高斯被认为是历史上最重要的数学家之一,并享有“数学王子”的美誉。

高斯函数的定义:设 $x \in \mathbb{R}$,用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,则称 $f(x)=[x]$ 为高斯函数,也叫取整函数。显然,任一实数 x 都能写成整数部分与非负纯小数部分之和,即 $x=[x]+r(0 \leq r < 1)$ 。函数 $f(x)=[x]$ 早在十八世纪即为“数学王子”高斯所采用,因此,

$f(x)=[x]$ 得名高斯函数。

(二) 知识内涵——高斯函数的性质

根据高斯函数 $f(x)=[x]$ 的定义,可以得到它的一些常用性质,介绍如下。



性质1 $f(x)=[x]$ 的定义域是 \mathbb{R} ,值域是 \mathbb{Z} ,其图象如图所示。

性质2 当 $x \leq y$ 时,有 $[x] \leq [y]$ 。

性质3 对任意实数 $x \in \mathbb{R}$,都有 $[x] \leq x < [x] + 1$ 。

性质4 对任意实数 $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$,都有 $[x+k] = [x] + k$ 。

(三) 知识衔接——高斯函数与中学数学

1、巧用高斯函数计算星期几

在生活中,有时候需要知道历史上的重要日子是星期几,可以通过查万年历的方式,也可以通过数学的方式——高斯函数。

$$S = x - 1 + [\frac{x-1}{4}] - [\frac{x-1}{100}] + [\frac{x-1}{400}] + C$$

x 是公元的年数, C 是从这一年的元旦算到这天为止(这一天也包括在内)的天数。求出 S 以后,再用7除。如果除尽,这一天是星期日;若余数是1,那么是星期一;余数是2就是星期二。依此类推。

例:1949年10月1日是伟大的祖国成立的日子,这一天是星期几?

$$\begin{aligned} S &= x - 1 + [\frac{x-1}{4}] - [\frac{x-1}{100}] + [\frac{x-1}{400}] + C \\ &= 1949 - 1 + [\frac{1949-1}{4}] - [\frac{1949-1}{100}] + [\frac{1949-1}{400}] \\ &\quad + (31+28+31+30+31+30+31+30+1) \\ &= 2694 \end{aligned}$$

因为2694除以7的余数是6。所以,1949年10月1日是星期六。

2、高斯函数与数学竞赛

在数学竞赛中经常出现关于 $[x]$ 的方程、等式、不等式、整除问题、格点问题、组合数问题以及二项式定理问题等,解决有关高斯函数的问题,不仅要了解高斯函数的定义、性质,而且要了解解决高斯函数问题的常用方法,下面展示一道加拿大数学奥林匹克竞赛题,分别使用枚举法和逻辑推理法解答。

(1999年加拿大数学奥林匹克竞赛)求方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的所有实数解。

解:(枚举法)

因为 $[x] \leq x$,所以 $4x^2 - 40[x] + 51 \geq 4x^2 - 40x + 51 = (2x+3)(2x-17)$

$$\text{即 } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}, \text{ 于是 } [x] = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

当 $[x]=1$ 时,方程化为 $4x^2+11=0$,无实数解;

当 $[x] = 2$ 时, 方程化为 $4x^2 - 29 = 0$, 由 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$, 得 $x = \frac{\sqrt{29}}{2}$

当 $[x] = 3$ 时, $x = \frac{\sqrt{69}}{2} > 4$, 与 $[x] = 3$ 矛盾, 排除;

当 $[x] = 4$ 时, $x = \frac{\sqrt{109}}{2} > 5$, 与 $[x] = 4$ 矛盾, 排除;

当 $[x] = 5$ 时, $x = \frac{\sqrt{149}}{2} > 6$, 与 $[x] = 5$ 矛盾, 排除;

当 $[x] = 6$ 时, $x = \frac{\sqrt{189}}{2}$, 此时 $\left[\frac{\sqrt{189}}{2}\right] = 6$, 因此 $x = \frac{\sqrt{189}}{2}$ 是方程的解;

同理, 当 $[x] = 7, 8$ 时, 分别可以得到 $x = \frac{\sqrt{229}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{269}}{2}$ 都是

方程的解;

综上所述, 方程的解集为 $\left\{\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$

评注: 竞赛题出题形式千变万化, 但是万变不离其宗——高斯函数的定义和性质, 我们要在会计算的基础上进行举一反三, 才能更好的运用数学思想方法。比如, 本题可以改编为求方程 $4x^2 + 40[x] + 51 = 0$ 的所有实数解, 解题方法与上述题目类似, 在使用枚举法时要注意不要漏举和错举。

(四) 知识联结——高斯函数与高等数学

对于高斯函数, 如果能站在高等数学的角度重新认识与学习, 往往会使学生思维更灵活, 思路更广阔, 可以创造性地获得更多的新知识, 解决更具挑战性的难题。在高等数学中, 极限占有极其重要的地位。在极限相关知识背景下, 结合高斯函数的性质, 可证明或求解极限; 求解与 $[x]$ 有关函数的导数, 需要观察 $[x]$ 有关的函数的连续性, 进而进行求导。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n + n]}{n} = a + 1$.

解: 根据高斯函数的性质有, $[x+n] = [x] + n$; $x-1 < [x] \leq x$

所以 $[na_n + n] = [na_n] + n$, $na_n - 1 < [na_n] \leq na_n$

两边同时除以 n ($n > 0$) 得, $a_n - \frac{1}{n} + 1 < \frac{[na_n + n]}{n} \leq a_n + 1$

由两边夹定理可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \frac{1}{n} + 1) = a + 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = a + 1$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n + n]}{n} = a + 1$, 得证。

三、思考与展望

随着新高考的不断深入, 渗透数学文化的高考创新题不断出现在大众的视野中, 正是因为高考数学越来越关注数学文化的考查, 数学教育专家们和一线的老师也越来越关注数学文化, 潜移默化地影响学生们关注数学文化, 一线老师们也更把数学文化与课堂教学紧密地结合起来。

(一) 加强数学文化修养, 快速理清问题关键

教师要多阅读数学史和数学名著, 深入挖掘材料背后所隐含的教学价值, 全面提高自身的数学修养, 把名著中体现的适合教学的相关专业知识、数学史知识、数学的人文精神等提取出来, 运用到数学教学中去。教师在平时的教学中还要有意识的去锻炼学生的数学阅读能力和数学化能力, 以便使学生在考试中能够从这些富含文化背景的题目上快速理清题目的核心条件与核心问题。

(二) 挖掘理性文化魅力, 感受数学文化熏陶

作为一线教师, 不应该把数学单纯理解为一门应用性工具学科, 而应当让其成为一种美学形态的文化形式。数学教师应当时时地引导学生去发现数学的美, 并让学生在学习中不断感悟数学所呈现出来的美, 以便增强学生的兴趣。应时刻树立数学文化意识, 让学生了解祖先的聪明智慧, 增强民族自豪感, 了解数学知识背后丰富的历史渊源, 感受数学文化的熏陶体会数学独特的文化魅力。

参考文献:

- [1] 教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
 - [2] 蒋孝国. 数学竞赛中的高斯函数 [J]. 数学通讯, 2015 (19): 45-48.
 - [3] 管永良. 高考常见的四类特殊函数 [J]. 高中生, 2014 (36): 32.
 - [4] 洪恩锋. 源于课本例题的一个活跃函数——高斯函数 [J]. 中学生数学, 2014 (19): 42-43.
 - [5] 刘兴. 取整函数 $y = [x]$ 性质及应用小议 [J]. 数学教学通讯, 2009 (15): 32-33.
 - [6] 逢淑艳. 高斯函数在竞赛数学中的应用 [D]. 华南师范大学, 2007.
 - [7] 徐丽颖. 高斯函数的教育价值及教学实践研究 [D]. 湖南师范大学, 2020.
 - [8] 吴康等. 奥数金牌题典 (高一数学) [M]. 广西: 广西师范大学出版社, 2004.
 - [9] 吴康等. 奥数金牌题典 (高中数学) [M]. 广西: 广西师范大学出版社, 2004.
 - [10] 潘承洞, 潘承彪著. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.
 - [11] 闵嗣鹤, 严士健编. 初等数论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- 作者简介:**
蒋倩 (1998—), 女, 汉族, 广西全州县, 硕士研究生, 中小学数学课程与教学论。

上接第 32 页

of June, enclosing your catalogue, price list and samples of paperweights. We have tasted the samples and are pleased with their quality. We enclose our official purchase order and will open an irrevocable letter of credit as soon as we receive your pro forma invoice."

分析: 该段落是商务信函对于压纸器购买订单的语句, 文段中包含商务英语中的专属词汇表达, 比如 catalogue 通常指目录, 商务信函范畴这专指商品目录或产品目录。段落中 enclose 运用了两种形式, 原指围绕, 这里指随信附件附上, 第一句运用的是现在分词作伴随状语。另 irrevocable letter of credit 指不可撤销信用证, pro forma invoice 指形式发票, 这是在商务信函中出现的高频词汇, 往往日常普通英语中不常见。

三、结语

在全球化视野的大背景下, 学生未来的工作与生活也会涉

及到国际元素。商务英语词汇的教学有助于学生适应国际化的工作与学习环境, 营造不断充实自我英语学习能力的氛围, 通过商务英语词汇的学习扩充自身英语语言储备, 提升英语表达以及交际水平, 更深入地探索了解中国和国外文化的差异。服务贸易业在商务英语领域中特色鲜明, 因由于其特殊用途, 会涉及到日常接触较少的词汇, 商务英语教学中教师亦可适当引导学生及时以词汇为基础, 从发音、运用、语法等各个角度归纳整理, 帮助引导学生更利用好国际化语言交流工具, 为“讲好中国故事”, 中国文化向外传播发展贡献力量。

参考文献:

- [1] 林珊. 国际服务贸易壁垒研究 [J]. 亚太经济, 2005 年第六期
- [2] 刘白玉. 商务英语的词汇特征及其翻译 [J]. 北京第二外国语学院学报, 2007 (4)
- [3] 孙亚, 王立非. 基于隐喻使用的《商务英语综合教程》评估 [J]. 外语界, 2013 (4)