函数中任意和存在问题的转化

宋 悦
（南京师范大学 江苏 南京 224000）

【摘 要】文章以一道全称命题、存在命题和函数相结合的题目为例，考察全称命题和存在命题如何转化成最值问题，充分体现了等价命题在解决一些较复杂的题目时的作用，文章旨在对全称命题、存在命题和函数最大最小值的一类问题进行梳理，为学生打开思路，深刻理解函数最值的含义，灵活运用。

【关键词】全称命题；存在命题；函数最值

1 问题呈现

已知函数 $f(x)=x+\frac{a^2}{x}$，$g(x)=x-\ln x$，若对任意的$x_1\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，存在$x_2\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，使得$g(x_1)\le f(x_2)$，则实数$a$的取值范围是______。（2019南师附中、天一中学、海门中学、淮阴中学联考，12）

这道题选自江苏四所中学的联考题，是一道填空题，难度中等，本题的难点在于如何理解题目中所给的任意和存在的关系，学生如果不能将这个问题转化，那么本题就十分困难。如何将此类问题进行转化，也是本文需要重点说明的地方。

2 背景分析

上述题目给了两个函数，$f(x)$中含有参数，$g(x)$中不含参数，然后给出了这两个函数需要满足的条件，根据这个条件求出a的取值范围．第一眼看到这个题目，大多数学生都表示无从下手，这是因为学生还没有理解给出条件的内涵，找不到解题的方向．解题常用技巧之一就是化归．该类题目的解法有比较固定的化归思路，通常是将全称命题和存在命题转换成求解函数的最值，通过比较最值得到答案。

在本题中，可以将题目中所给的：已知函数$f(x)=x+\frac{a^2}{x}$，$g(x)=x-\ln x$，若对任意的$x_1\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，存在$x_2\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，使得$g(x_1)\le f(x_2)$转化成这样的等价命题：若$g(x)$在$x\in A$上有最大值，$h(x)$在$x\in B$上有最大值，则$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，$h(x_1)\le g(x_2)$等价于$h(x_1)_{\max}\le g(x_2)_{\max}$。

3 解法探究

本题就是从上述题目背景分析出发，将问题化归成比较两函数最值的问题，上述化归思路给我们提供的是解题的原型，这只是给我们指明了解题的大致方向，解具体的题目时还要从题目本身出发，进行求解。

步骤一：对于任意的$x_1\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，存在$x_2\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，使得$g(x_1)\le f(x_2)$成立这句话进行转化，转化成等价命题：对任意的$x_1\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，存在$x_2\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，使得$g(x_1)_{\max}\le f(x_2)_{\max}$成立。

步骤二：求解$g(x)=x-\ln x$在区间$\left[\frac{1}{e},1\right]$上的最大值，易得$g(x)_{\max}=\frac{1}{e}+1$。

步骤三：求解$f(x)=x+\frac{a^2}{x}$在区间$\left[\frac{1}{e},1\right]$上的最大值，根据这个函数的性质，我们知道此函数的最大值肯定在区间端点处取得，分情况讨论，发现函数$f(x)$在$x=\frac{1}{e}$处取得最大值时，不等式$f\left(\frac{1}{e}\right)\ge\frac{1}{e}+1$有解，化简得$a^2\ge\frac{1}{e}$。

步骤四：通过计算得a得取值范围是$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{e}}{e}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$。

4 拓展延申

波利亚在《怎样解题》中将数学解题划分为四个阶段：弄清问题——拟定计划——实施计划——回顾[1]，回顾这一阶段就包括反思，上述这一道题已经得到了解决，回顾整个解题过程，我们需要反思以下几个问题：为什么解题过程会出现无从下手的问题？全称命题、存在命题与函数最值的关系还有哪些？如何理解这些关系？

针对第一个问题，学生为什么会出现无从下手的情况，主要是学生不能熟练的对问题进行等效变换，对于形异质同的问题，即若干问题间看似没有什么关联或相似性，但究其本质却是相同的问题缺乏认知[2]。

针对第二个问题和第三个问题，经过梳理总结，可以总结以下关系：

4.1 对于在区间A上的函数$f(x)$，在区间B上的函数$g(x)$，$\exists x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，$f(x_1)>g(x_2)$等价于$f(x_1)_{\max}>g(x_2)_{\max}$．$\exists x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，$f(x_1)>g(x_2)$这句话可以理解成函数$f(x)$只要有一个值大于函数$g(x)$在定义域上的所有值即可，当$f(x_1)_{\max}>g(x_2)_{\max}$时，满足条件．

4.2 对于在区间A上的函数$f(x)$，在区间B上的函数$g(x)$，$\exists x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，$f(x_1)<g(x_2)$等价于$f(x_1)_{\min}<g(x_2)_{\min}$．$\exists x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，$f(x_1)<g(x_2)$这句话可以理解成函数$f(x)$只要有一个值小于函数$g(x)$在定义域上的所有值即可，当$f(x_1)_{\min}<g(x_2)_{\min}$时，满足条件．

4.3 对于在区间A上的函数$f(x)$，在区间B上的函数$g(x)$，$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，$f(x_1)>g(x_2)$等价于$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\min}$．$\forall x_1\in A$，$\exists x\in B$，$f(x_1)>g(x_2)$这句话可以理解成函数$g(x)$只要有一个值能小于函数$f(x)$在定义域上的所有值即可，当$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\min}$时，满足条件．

4.4 对于在区间A上的函数$f(x)$，在区间B上的函数$g(x)$，$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，$f(x_1)<g(x_2)$等价于$f(x_1)_{\min}<g(x_2)_{\min}$．$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，$f(x_1)<g(x_2)$这句话可以理解成函数$g(x)$只要有一个值能大于函数$f(x)$在定义域上的所有值即可，当$f(x_1)_{\max}<g(x_2)_{\max}$时，满足条件。

5 解题反思

5.1 巧用化归，将不熟悉的题目转换成熟悉的题目

这道题处于试卷填空题12题的位置，属于中档题，若单纯去求解，不进行转化，该题很难入手，但是如果深刻的认识到任意和存在与函数最值的关系，这道题就会柳暗花明，我们发现这道题的主要思路在于转化，解题的每一步骤都是将问题转化成我们熟悉的，基本的问题．这道题的难点在于如何理解任意和存在这两个问题，这类题目变化多样，需深刻理解任意和存在的含义，才能以不变应万变。

5.2 做题要学会举一反三，做一题，归一类，得一法

本题是一道全称命题、存在命题和函数最值问题的比较，由一题我们总结了一类问题的解法，从而对此类问题理解更为深刻，我们教师在讲习题课时，应注重学生举一反三能力的培养，在指导学生学习时，应引导学生思考解题思路的由来，注重反思，让学生尝试数学写作，养成良好的数学学习习惯。

参考文献：

[1] 波利亚．怎样解题——主要部分，主要问题 [M]．上海：上海科技教育出版社，2002.

[1] 段志贵．数学解题研究——数学方法论的视角 [M]．北京：清华大学出版社，2018.

作者简介：

宋悦（1995），女，汉，江苏盐城，硕士研究生，研究方向：中学数学教育。