一类数列极限题的多种解法

黄华平
（重庆三峡学院 数学与统计学院　重庆　404020）

【摘　要】以一道考研题为例，采用化归的思想，利用数学归纳法和单调收敛原理等给出了一类数列极限题的多种解法。
【关键词】数学归纳法；单调收敛原理；压缩数列；收敛；极限
【中图分类号】O171.51　　【文献标识码】A

1 引言

一题多解问题不仅是数学分析、高等数学学习的重点和难点，也是整个数学领域研究的热门课题。掌握一题多解方法，不仅能够锻炼学生的综合运用数学知识的能力，而且能够加强学生的逻辑思维和空间想象能力，还有助于提高教师的教学创新能力和科学研究水平。灵活运用一题多解方法，使学生们在研究生考试，数学竞赛中大显身手，做题时能够得心应手，挥洒自如。基于此，本文以一类数列极限题为例，用多种方法给出其解题过程。旨在起到以此为鉴，触类旁通，抛砖引玉之功效。

为此，首先给出如下引理：

引理1[1]　设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，数列 $\{z_n\}$ 为

$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$，

则 $\{z_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $a=b$.

引理2[2]　形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p,q 为常数，且 $p^2+4q>0$）的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$，其中 α,β 为方程 $x^2-px-q=0$ 的两个根。

引理3[3]　设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩数列条件：

$|x_n-x_{n-1}|\le r|x_{n-1}-x_{n-2}|\quad(n=3,4,\cdots,)$,

其中 r 为常数，且 $0<r<1$，则 $\{x_n\}$ 为收敛数列。

2 主要结果

下面给出一类数列极限的五种解法。现以一道考研题目（2019年武汉大学数学专业研究生入学考试试题）为例。

例1　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

证明　方法1 由于 $a_n\ge2$，故

$$|a_{n+1}-(1+\sqrt2)|=\left|\frac{(\sqrt2-1)(\sqrt2+1)}{a_n}-(\sqrt2-1)\right|=\frac{\sqrt2-1}{a_n}|a_n-(1+\sqrt2)|$$

$$\le\frac{\sqrt2-1}{2}|a_n-(1+\sqrt2)|\le\left(\frac{\sqrt2-1}{2}\right)^2|a_{n-1}-(1+\sqrt2)|$$

$$\le\cdots\le\left(\frac{\sqrt2-1}{2}\right)^n|a_1-(1+\sqrt2)|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt2-1}{2}\right)^n|a_1-(1+\sqrt2)|=0$，所以由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}-(1+\sqrt2)|=0$，导出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt2$.

方法2　易证 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增。事实上，$a_1=2<a_3=\frac{12}{5}$.

假设 $a_{2n-1}<a_{2n+1}$，则

$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n+2}}-\frac{1}{a_{2n}}=\frac{a_{2n}-a_{2n+2}}{a_{2n+2}a_{2n}}=\frac{1}{a_{2n+2}a_{2n}}\cdot\frac{a_{2n+1}-a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n+1}}>0,$$

从而 $a_{2n+3}<a_{2n+1}$，于是由数学归纳法，$\{a_{2n-1}\}$ 单调递增。

同理可证 $\{a_{2n}\}$ 单调递减。因为 $2\le a_n\le\frac52$，所以由数列的单调收敛原理，$\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 都收敛。令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=B$. 显然 $A,B\in\left[2,\frac52\right]$. 又由题设，有

$$\begin{cases}a_{2n}=2+\dfrac{1}{a_{2n-1}},\\ a_{2n+1}=2+\dfrac{1}{a_{2n}}.\end{cases}$$

在上式等号两边让 $n\to\infty$ 取极限，可得 $B=2+\frac1A$ 和 $A=2+\frac1B$. 解得 $A=B=1+\sqrt2$. 因此，由引理1，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt2$.

方法3　令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$，即 $a=2+\frac1a$. 解得 $a=1\pm\sqrt2$. 由于 $a_n\ge2$，故由数列极限的保不等式性，有 $a\ge2$，从而 $a=1+\sqrt2$.

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。事实上，由于 $\frac{|a_1-a|}{(2a)^n}\to0\ (n\to\infty)$，故 $\forall\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有

$$|a_{n+1}-a|=\left|2+\frac{1}{a_n}-\left(2+\frac1a\right)\right|=\left|\frac{1}{a_n}-\frac1a\right|=\frac{|a_n-a|}{a_na}$$

$$\le\frac{|a_n-a|}{2a}\le\frac{|a_{n-1}-a|}{(2a)^2}\le\cdots\le\frac{|a_1-a|}{(2a)^n}<\varepsilon.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 存在，且 $a=1+\sqrt2$.

方法4 作递归数列 $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$，其中 $x_1=1$， $x_2=2$. 由引理2，有

$$x_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right].$$

又由 $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ 得到 $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=2+\frac{x_n}{x_{n+1}}$. 再联立题设，故令 $a_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=1+\sqrt{2}.$$

方法5 由于 $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}\geq 2$，故

$$|a_{n+1}-a_n|=\left|2+\frac{1}{a_n}-\left(2+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\right|=\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right|=\frac{|a_n-a_{n-1}|}{a_na_{n-1}}\leq\frac{1}{4}|a_n-a_{n-1}|.$$

于是 $\{a_n\}$ 是一个压缩数列。由引理3可知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 存在。再在 $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$ 等号两边让 $n\to\infty$ 取极限，有 $a=2+\frac{1}{a}$. 解得 $a=1\pm\sqrt{2}$. 又由 $a_n\geq 2$ 和数列极限的保不等式可得 $a\geq 2$. 因此，$a=1+\sqrt{2}$.

利用本例的解题思想，可以用多种方法来求出下列类型的数列极限：

例2 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$， $a_{n+1}=\alpha+\frac{\beta}{a_n}$，其中 a,α,β 为常数，且 $\alpha^2+4\beta>0$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

参考文献：

[1] 华东师范大学数学科学学院．数学分析（上册）[M]．第五版．高等教育出版社，2019，24-37

[2] 付琴，黄华平等．两类特殊数列的通项公式的新解法。湖北理工学院学报[J]，2016，32(4)：38-40

[3] 钱吉林．数学分析题解精粹[M]．第1版．崇文书局，2003，64-65

基金项目：

重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX0762)，重庆三峡学院人才引进科研启动基金项目(2104/09926601)，重庆三峡学院教改项目(JGZC2124，JGYB2003)

作者简介：

黄华平(1978-)，男，湖北安陆人，博士，副教授，研究方向为函数论。

上接第91页

医院带教医师可以通过模型演练的方式，对实习生实施集中讲解、模型操作，使学生在技能和操作熟练度方面得到较快的提升，也有利于学生沟通能力的提高。

2.2 开展医德医风教育，把服务作为自身的使命

医师的最大职责就是尽自己之力，使病患获得痊愈。也就是说，作为医生，救死扶伤，防病治病，这是工作之本。医德医风代表的不是一个医生也不是一家医院，而是整个医疗界的荣誉。因此，无论是医学生的学校指导教师还是医院的带教医师，都要身体力行、以身作则，有意识的去影响和培养医学生这种素养，让他们在实习过程中，感悟自身职责，明确医生使命。在医院，病患由于处于疾病状态，心里都具有不同程度的不安，也容易发怒，因此必须要培养学生的主动服务意识，无论任何原因引起的患者不安，都要运用人文关怀技巧实施安抚，不可由着自己的性子去处理问题。医患之间，是服务与被服务的关系，为患者服务是每一个医生的职责，这其中也包含实习学生。

2.3 引导医学生合理规划考研复习与临床实习

从各个角度来思考，考研都会对医学生的实习产生不可避免的影响。由于考研需要花费大量的时间与精力，作为学校指导教师应该在实习之前与学生做好动员，让学生明确了解我国当前的医学就业形势，以及国家对医疗卫生行业人才的需求方向与需求量。让学生知道，并不是只有考研一条出路，通过教师的引导，很多学生根据自身实际情况，会选择直接就业。为了让学生考研的同时兼顾实习，学校指导教师可以通过远程辅导的方式，让学生了解考研的知识点与关注点，从而让学生在备考过程中，少走弯路，让学生有充足的时间，去认真完成临床实习。

2.4 严格临床实习教学管理制度，明确实习生的实习义务

从法律角度上，实习生没有对应的医疗事故处理职责与义务，但在现实中，每一个患者都是一个独立的个体和生命体，必须被认真对待。作为学校指导教师，必须在思想上让实习生明确自身的责任和义务，以及一旦医疗事故发生后，会导致的严重后果。通过视频或是文本案例，展示给学生鲜活的例证，让学生能充分感受到医生职业的重要性，以及自身所需要肩负的责任与义务。同时，医院带教医师在临床带教过程中，应该更好的协同校内指导教师进行联合教学管理，让实习生从规范化的管理体系中，感触到医疗的严肃，以及自己责任的重大，做到不迟到不早退，勤劳认学，从而更好的提高自身的医德医术。

2.5 加强实习前专业化教育，培养学生吃苦精神

医学生在步入实习医院前，学校指导教师应统一召开实习前培训会，引导学生树立正确的人生观，并把自己的人生观与病患相结合，增强实习生的医生责任感。让学生根据自身情况制定自己的“合格医生”目标，并为之而努力达到。而医院带教医师应该通过床旁教学，让实习生主动与病患接触，引导他们去了解病患，掌握病情，正确诊疗，不断培养实习生在工作岗位中吃苦耐劳的精神，着力磨练临床技能，在服务患者中持续提高医术。

3 结论

综上所述，临床实习是一个从学校理论到医院临床的重要阶段，在这个阶段无论是学校还是医院，都应该在各方面重视和加强对实习学生的实习教学管理，通过多种方法，来保障医学生临床实习效果，提高实习教学质量。

参考文献：

[1] 龚垒，范真．基于过程管理的实习系统对医学生实习效果提升的研究[J]．现代职业教育，2021(35)：82-83.

[2] 游文献，古赛．医学生临床实习阶段问题分析[J]．现代医药卫生，2020，36(06)：935-937.

作者简介：

姓名：花楷，出生年月：1990.2.2。性别：男，民族：汉族，籍贯：山东省济南市，研究方向：实践教学管理，学历：研究生职称：中级。