Pisco Med Publishing

关于无穷小量的一些注记

黄华平
（重庆三峡学院 数学与统计学院 重庆 404020）

【摘 要】通过研究因式代替规则与和差代替规则的条件，给出了应用无穷小量性质计算函数极限的几个反例，从而证实了这些条件的必要性．

【关键词】因式代替规则；和差代替规则；无穷小量；极限．
【中图分类号】O171.51　　　【文献标识码】A

1 引言

无穷小量和无穷大量是反映自变量在某一变化过程中函数的两种特殊的变化趋势 [1]，即绝对值无限变小和绝对值无限增大．由于无穷小量在建立微积分时具有基础性的地位，故早期的微积分也称为无穷小分析 [2]。

无穷小量在历年的研究生考试，数学竞赛中占有很大的比例．特别是利用无穷小量的结果来计算数列极限、函数极限，判别级数和反常积分的敛散性等，通常是高等数学考研和数学竞赛的重点和难点．因此，掌握无穷小量相关的性质，往往会使得做题达到事半功倍的效果，故能大大提高解题效率．基于此，本文回顾了利用无穷小量计算$\frac{0}{0}$型极限的因式代替规则与和差代替规则 [3-7]，介绍了和差代替规则的证明过程．而且通过易错题的分析，给出了应用此两个规则的一些反例，从而证明了此两规则的每一个条件都必不可少．

2 主要结果

首先回顾一下因式代替规则：

引理 1[1]　设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 都在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都为无穷小量．

2.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=A.$

2.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B.$

注意，引理 1 中的“函数 $f(x), g(x), h(x)$ 都在点 x_0 的某去心邻域内有定义”这一条件不可缺少，否则结论不真．例如，下列极限的计算过程是错误的．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x\sin\frac{1}{x}}=1.$$

上述错误的原因是，原分式在点0的某去心邻域内没有定义．事实上，令 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，尽管 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$，但是 $x_n\sin\dfrac{1}{x_n}=0.$ 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(x_n\sin\frac{1}{x_n}\right)}{x_n\sin\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0}{0}$，显然此极限不存在．因此，由极限的归结原则，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 不存在．

其次，回顾一下和差代替规则：

引理 2[5]　设函数 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x), h(x)$ 都在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且当 $x\to x_0$ 时，它们都为无穷小量，并且 $f_1(x)\sim f_2(x)$ 和 $g_1(x)\sim g_2(x)$．如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 存在但不等于1或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\infty$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)-g_2(x)}{h(x)}.$

证明　显然当 $x\to x_0$ 时，$f_1(x)-g_1(x)$ 和 $f_2(x)-g_2(x)$ 都为无穷小量．由引理 1，需证当 $x\to x_0$ 时，$f_1(x)-g_1(x)\sim f_2(x)-g_2(x).$ 即证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}=1.$ 如下：

先设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A\neq 1$，则由引理 1，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{g_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$，从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-1}{\frac{f_2(x)}{g_1(x)}-\frac{g_2(x)}{g_1(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_1(x)}-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g_2(x)}{g_1(x)}}=\frac{A-1}{A-1}=1.$$

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\infty$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}=0$．由引理 1，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g_2(x)}{f_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}=0$，于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1-\frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-\frac{g_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1-0}{1-0}=1.$$

注意，引理 2 中的 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\neq 1$ 这一条件必不可少，否则结论不真．见下例：

例 1[2]　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}.$

解　错误解法如下：

由于当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，故由引理 2 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0.$$

上述错误的原因是忽略了引理 2 中的 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\neq 1$ 这一条件，而错用引理 2．这是因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1.$

正确解法如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

另外，引理 2 中的“如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 存在但不等于 1 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\infty$”这一条件也不可少，否则结论不真．下面构造

两个例子说明如此．

例2　设

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\sin x,\quad g_1(x)=g_2(x)=x\sin\frac{1}{x},\qquad x_n=\frac{1}{n\pi},$$

$x_n{}'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 不存在．由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-x\sin\frac{1}{x}}{\sin x-x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}-\sin\frac{1}{x}},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(x_n)-g_1(x_n)}{f_2(x_n)-g_2(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin n\pi}{\dfrac{\sin\frac{1}{n\pi}}{\frac{1}{n\pi}}-\sin n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{1}{n\pi}}{\frac{1}{n\pi}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(x_n{}')-g_1(x_n{}')}{f_2(x_n{}')-g_2(x_n{}')}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})}{\dfrac{\sin\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}-\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{\dfrac{\sin\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}-1}=0.$$

故由归结原则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}$ 不存在．

例3　设

$$f_1(x)=f_2(x)=2x-x\sin\frac{1}{x},\quad g_1(x)=x-x^3,\quad g_2(x)=x,$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 不存在．因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2x-x\sin\frac{1}{x}-x+x^3}{x}}{\dfrac{2x-x\sin\frac{1}{x}-x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin\frac{1}{x}+x^2}{1-\sin\frac{1}{x}}=1+\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sin\frac{1}{x}},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}$ 不存在．

参考文献：

[1] 华东师范大学数学科学学院．数学分析（上册）[M]，第五版．高等教育出版社，2019，56-63.

[2] 同济大学数学系．高等数学（上册）[M]，第七版．高等教育出版社，2014，34-41.

[3] 毛宇彤，乔虎生．关于无穷小量代数和的等价代换的注记 [J]．大学数学，2019，35(4)：115-121.

[4] 仝淑芳，郑军．等价无穷小代换在求和式极限中的应用 [J]．大学数学，2016，32(1)：105-109.

[5] 褚利忠，陈雨佳．和形式的等价无穷小代换 [J]．高等数学研究．2016，19(1)：86-89.

[6] 王良成，白海，马秀芬．用等价无穷小替换求一类和式极限 [J]．大学数学，2013，29(3)：97-100.

[7] 华梦霞，陈庆．利用等价无穷小代换求和式极限 [J]．大学数学，2013，29(1)：134-137.

基金项目：重庆市自然科学基金面上项目 (cstc2020jcyj-msxmX0762)；重庆三峡学院人才引进科研启动基金项目 (2104/09926601)；重庆三峡学院教改项目 (JGZC2124, JGYB2003)

作者简介：

黄华平 (1978-)，男，湖北安陆人，博士，副教授，研究方向：函数论。

上接第69页

在有序的“四步走”框架下不断的琢磨，历史课本知识的逻辑关系才能从规范中走向质的变化，才能确保厘清教科书知识逻辑性是有效的，进而才能实现教学的灵动，突出历史教师的教学个性。

（四）进行教学创意，追求知识资本性

著名美术教育家徐悲鸿曾说：“道在日新，艺亦须日新，新者生机也；不新则死。”教学设计同样如此。教师只有把教学设计当作创造作品一般，才能实现教学最大效率，要实现这一目标，教师须具备以下特征：

第一，认知过程的批判性，学思结合。做好教学设计是为了让学生学有所获，又学会所思。历史教师要巧设历史问题，引导学生学会对历史问题理性的看待，在理性评价历史的过程中产生追问的动机；

第二，教化领域的情意性。历史是有温度的一门学科，要使学生在学习中获得对历史的共鸣、情感的升华，教师要以“历史中的人”和“历史学习中的人”为中心，建立二者之间的联系。[8] 如在讲述《抗美援朝》，落实家国情怀素养时，教师应讲好黄继光、邱少云的故事，让学生与英雄故事形成情感的联系，从中去感悟爱国爱家的情怀。

第三，知识迁移的资本性。教师应有丰富的知识面，既要有中外历史知识的贯通，还要巧妙借助多媒体技术来拓展教科书内容，掌握与之相关的其它学科知识，让学生能掌握历史知识，又能了解其它学科知识，实现教学设计深度与广度的结合，实现知识迁移资本性。这样的教学设计落实于实践中，学生才会觉得老师有水平，学习历史真有趣的感悟。

四、结语

新时期历史课程改革背景下的初中历史教学设计，对初中历史教师提出更高的要求，教师的教学设计理念必须从根源观念发生革新，立足于历史学科五大核心素养，提高自己的知识储备；深刻把握学生学习现状及学习需求，不断追求教学方法的创新，创造出优质的教学设计来提高历史教学效率，促进教师与学生的同步发展。

参考文献：

[1] 夏辉辉．此中有真意 欲辩莫忘言——我与《历史教学》，兼谈历史教学写作 [J]．历史教学（上半月刊），2021(03)：39-41.

[2] 中华人民共和国教育部：《义务教育历史课程标准（2011年版）》，北京师范大学出版社，2012 年。

[3]（美）奥苏伯尔（Ausubel，David P.）等著；佘星南，宋钧译．教育心理学 认知观点 [M]．北京：人民教育出版社．1994.

[4] 戴加平．好课三要素：故事、学法、灵魂——“一节好的历史课”标准之我见 [J]．历史教学（上半月刊），2014(11)：46-48+65.

[5] 钟启泉．现代课程论 [M]．上海：上海教育出版社，2003 年，第 238 页。

[6] 王波．高中历史课堂教学设计的优化策略 [J]．中学历史教学，2020(10)：16-17.

[7] 中华人民共和国教育部：《义务教育历史课程标准（2011年版）》，北京师范大学出版社，2012 年。

[8] 夏辉辉．此中有真意 欲辩莫忘言——我与《历史教学》，兼谈历史教学写作 [J]．历史教学（上半月刊），2021(03)：39-41.

作者简介：

黄连娅（1998-），女，贵州安龙人，云南师范大学研究生，研究方向：学科教学（历史）。