

从教材对比分析人教版新教材中高中数学课程 “三角函数的概念”的变化及意义

朱 珊 曾伟梁

(哈尔滨师范大学数学科学学院 黑龙江 哈尔滨 150025)

【摘要】新教材的定义过程比旧教材更加抽象,注重强调函数的本质和思想,以发展学生的核心素养和培养学生能力为核心。教师要充分领悟新课程标准的教育理念,通过对比课程与教材的变化,深刻领悟新教材内容变化的实际意义,挖掘它的育人价值。

【关键词】新旧教材;变化;核心素养;三角函数

Abstract:The definition process of the new textbook is more abstract than that of the old textbook, pays attention to the essence and thought of function, and takes developing students' core literacy and cultivating students' ability as the core. Teachers should fully understand the educational concept of the new curriculum standard, deeply understand the practical significance of the change of the content of the new textbook and tap its educational value by comparing the changes of curriculum and teaching materials.

Key words:New and old textbooks; Change; Core literacy; Trigonometric function

1 绪论

与旧课标相比较,新课标的突出特点是以培养学生的数学学科核心素养为导向。三角函数是函数的重要组成部分,是刻画周期现象的函数模型。2017版数学课程标准下的人教A版教材(以下简称新教材)将其放在函数的主线下进行学习,体现了新课程标准下课程结构的改变。三角函数的概念是三角函数知识体系的重要开端,是将角的概念拓展到任意实数基础上继续学习。本文通过对比2003版数学课程标准下的人教A版教材(以下简称旧教材)与2017版新课标下的人教A版教材(以下简称新教材)中“三角函数的概念”一节课发现新课程标准下的数学课程内容的变化。

2 对比内容

2.1 所在位置

旧教材本节课在必修四第一章第二节第一课时。旧教材按模块教学^[1],在学生学完函数的概念、研究指数对幂三类基本初等函数后,间隔学习了三角算法等内容后学习的三角函数。

新教材本节课在必修第一册第五章第二节第一课时。新教材高中数学课程内容突出函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线^[2],因此在必修1集中安排学习函数内容,三角函数紧随指对幂的学习进行,体现了三角函数是函数的重要组成部分。

相对于旧教材的安排,新教材如此安排更符合学生的认知特点,使函数知识的更具有连贯性。

2.2 标题名称

旧教材:1.2.1 任意角的三角函数;新教材:5.2.1 三角函数的概念。

从标题可以看出新旧教材对三角函数概念一节的侧重点不同,旧版突出从锐角三角函数到任意角的三角函数的拓展,而新版则是突出体现三角函数的函数本质。

2.3 课前引入

旧版教材以初中所学的锐角三角函数为新知识的生长点提出新的问题“在直角坐标系中用角的终边上的点来表示锐角三角函数”来引入本节课所学的内容。^[3]

新版教材以函数是刻画客观世界中变化规律的模型为基础,提出本节课的研究任务“建立一个数学模型刻画单位圆上点P的位置变化”,^[4]暗含三角函数是刻画周期变化规律

的特点。这样的导入不仅可以提高学习兴趣,而且可以使学生切实感受三角函数的应用价值。

2.4 概念生成过程

旧版教材首先将锐角 α 放在直角坐标系中利用初中学过的锐角三角函数的定义得到 $\sin \alpha = \frac{b}{r}, \cos \alpha = \frac{a}{r}, \tan \alpha = \frac{b}{a}$ 。

接着强调这三个比值与点P的位置无关,所以可以另 $r=1$,那么锐角三角函数的就可以用点P的坐标表示得到:

$$\sin \alpha = b, \cos \alpha = a, \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

于是到这里旧教材就相当于已经给出了三角函数的公式。

新版教材直接借助单位圆建立直角坐标系,提出一个探究活动:

给定一个特殊角求它与单位圆交点的坐标,再到一个一般角。从特殊到一般使学生在探究的过程中逐渐发现其中的一一对应关系,那么这种对应关系是满足函数的定义,由此发现三角函数。

通过以上对比概念生成过程的设计可以看出,两版教材的概念生成过程有很大差异,旧教材是锐角三角函数的进一步学习,新教材则是从函数入手学习。

新教材首先体现了学生的主体学习地位,让学生在探究中逐渐生成函数的概念;其次,体现了三角函数的函数本质,也就是它满足函数的一一对应关系;最后,通过以上探究的过程,可以培养学生的函数思想,发展学生的数学建模和数学抽象的核心素养。

2.5 得出定义

旧版教材在给出定义前首先回顾上节课所学的弧度制,并由此引入单位圆的定义。在此基础上便明确P点就是 α 的终边与单位圆交点,那么锐角三角函数可以用单位圆上点的坐标表示。于是就可以利用单位圆定义任意角的三角函数。

旧版教材以锐角三角函数为研究对象,得到用单位圆定义锐角三角函数,并在此基础上类比拓展到任意角。在这过程中,学生可以感受到任意角的三角函数扩展的合理性,是把任意角的三角函数看成是锐角三角函数的形式推广,从概念这里没有体现三角函数所刻画的周期性,也没有体现出三

角函数的函数特征。

新版教材在探究后给出：经对于 R 中的任意一个角 α ，它的终边 OP 与单位圆交点为 $P(x, y)$ ，无论是横坐标 x 还是纵坐标 y ，都是唯一确定的。^[4]

这里存在着两个对应关系：

f : 实数 α (弧度) 对应于点 P 的纵坐标 y ; g : 实数 α (弧度) 对应于点 P 的横坐标 x 。

$f: R \rightarrow [-1, 1]$; $g: R \rightarrow [-1, 1]$ 都是从集合 R 到集合 $[-1, 1]$ 的函数，从而得到三角函数的概念。

新版教材借助单位圆，借助数形结合的方法，整个探究以一般函数概念为指导抽象出三角函数的对应关系，让学生感受到概念生成过程的水到渠成，更好地揭示了任意角三角函数的本质。特别是在单位圆上为三角函数概念的抽象创设了一个更简化运算、突出数学本质的情境，同时也发展了学生的直观想象的核心素养。^[5]

2.6 定义的描述

新版教材增加了对 $y, x, \frac{y}{x}$ 是 P 的纵坐标、横坐标及横纵

坐标比值的描述，更加严谨，并且对符号的表示顺序进行了前后调换的更改，更符合函数的定义特点。由于新教材是在探究过程中找到三角函数的对应关系，从而得出的定义。所以新教材删除了旧教材中最后一句对三角函数对应关系的描述，改为用 x 替换 α 的描述方法给出三角函数的定义及符号表达式，并标注了定义域。以上更改都是体现新课标中三角函数是函数主线下的内容，突出三角函数是函数的本质特征。

2.7 新教材增加探究活动

探究：

在初中我们学习了锐角三角函数，知道它们都是以锐角为自变量，以比值为函数值的函数，设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。把按锐角三角函数定义求得的锐角 x 的正弦记为 z_1 ，并按按照本节三角函数定义求的 x 的正弦记为 y_1 ， z_1 与 y_1 相等吗？对于余旋、正切也有相同的结论吗？

因为旧版教材是在锐角三角函数的基础上得到任意角的三角函数的定义，所以学生没有二者之间的认知冲突，而新版教材是以研究函数的对应关系来得到任意角的三角函数的定义，学生此时会有疑问与初中所学的锐角三角函数有何不同，因此在得出定义后设置第二个探究，用两种定义同时求解锐角范围内某一角的正弦、余弦、正切是否相同，从而完善定义，丰富学生的认知。

2.8 例题

新旧教材都有两道例题，例 1 相同：求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦余弦和正切值。例 2 不同，但都通过例 2 给出了三角函数的坐标比定义。

旧教材例 2：已知角 α 的终边经过点 $P_0(-3, -4)$ ，求角 α 的正弦、余弦和正切值。^[3]

并在旁注中给给出另一个问题。

例 2：一般地，设角 α 终边上任意一点的坐标为 (x, y) ，它与原点的距离为 r ，则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

你能自己给出证明吗？

由于例 2 的存在使的这个一般证明也比较简单。

新教材例 2：设 α 是一个任意角，它的终边上任意一点 P (不与原点重合) 的坐标为 (x, y) ，点 P 与原点的距离为 r

· 求证： $\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。^[4]

新版教材的例 2 实际就是旧版教材旁注中的题，证明了三角函数值与终边上点的位置无关。相对旧教材从特殊到一般的阶梯，新教材直接让学生证明一般性，提升了学生的推理证明难度，可以发展学生的逻辑推理的核心素养。

2.9 新教材新增练习部分

新版教材在此时概念的教学完成后，增加了练习的版块，共四道练习题。2、3 小题是从本节课后的练习 1、2 中调整过来的。1、4 小题为新增。

1. 利用三角函数定义，求 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 的三个三角函数值。

2. 利用三角函数定义，求 $\frac{7\pi}{6}$ 的三个三角函数值。

3 已知角 θ 的中终边过点 $p(-12, 5)$ ，求角 θ 的三角函数值。

4. 已知点 P 在半径为 2 的圆上按顺时针方向做匀速圆周运动，角度为 1rad/s ，求 2s 时点 P 所在的位置。

第 1 小题，可以总结出求三角函数值的一般步骤。

第 4 小题，应用三角函数解决问题，一方面说明了三角函数是刻画周期性变化规律的函数模型，使学生清楚本节课前的研究任务可以用三角函数来解决，使学生感受函数的应用价值。

2.10 新教材删减部分

新版教材将以上从图形角度认识三角函数所引出的正弦线、余弦线、正切线的内容删去。旧教材利用这部分知识为后续学习三角函数的性质做铺垫。而新教材都是以单位圆为载体进行三角函数的研究，体现的是知识的连贯性与整体性。

3 总结

通过以上对比分析，可以发现新课标版教材三角函数的概念这一节内容的改动较大，从情境创设、任务设置及概念的呈现方式上充分体现了新课程标准的“以学生发展为本，落实立德树人根本任务，培育科学精神和创新意识，提升数学学科核心素养。”的教学理念。新教材的定义过程比旧教材更加抽象，注重强调函数的本质和思想。

作为教师，要充分的创造性的利用教材，挖掘其中蕴含的育人价值，从而发展学生的核心素养，培养新时代国家所需要的创新型能力型人才，真正发挥出数学的培养价值。

参考文献：

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)(2003年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2003.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 2017 版 [S]. 北京: 人民教育出版社, 2017.
- [3] 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书必修 4(A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.
- [4] 章建跃, 李增沪. 普通高中教科书必修第一册(A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [5] 徐建新, 陈丽珍. 两个课标人教版教材中《三角函数的概念》内容的比较研究. [J]. 福建中学数学, 2020(08): 20-23.

作者简介：

朱珊(1995-), 女(汉族), 黑龙江省双鸭山市, 研究生, 哈尔滨师范大学教师教育学院 2020 级学科教学(数学)专业。
曾伟梁(1977-), 男(汉族), 江西省新余市, 教授, 研究生导师, 研究方向: 数学教育, 信息与计算科学。