定积分在求解平面图形面积问题的实际应用

韩霖

（成都锦城学院　四川成都　611731）

摘要：通过定积分的几何意义，总结平面图形面积公式，探索平面图形面积在实际生活中的应用，本文给出在求解平面图形面积问题中的实际例子，加强定积分的实用性，提高教学效果。

关键词：定积分；平面图形面积；实际应用

Practical Application of Definite Integral in Solving Area Problem of Plane Figure

Han Lin

(Jincheng College of Chengdu, Chengdu, Sichuan 611731)

Abstract:In this paper we summarize the area formula of plan figure through the geometric meaning of definite integral and explore the application of the area of plane figure in real life.We give a practical example in solving the area problem of plane figure and strengthen the practicability of definite integral to improve the teaching effect.

Keywords:definite integral;the area of plane figure;practical application

定积分是高等数学课程中非常重要的一部分内容，它的应用非常广泛，常见的几何应用有：计算平面图形的面积，旋转体的体积，曲线的弧长以及物体的侧面积。在讲解这部分内容时，从理论出发，知识讲解对学生来说略感枯燥，可适当举出一些生活中实际问题的例子，以此吸引学生的注意，提升学生的学习兴趣，从而更容易掌握这部分内容。

1. 定积分的几何意义

如果函数在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，则定积分$\int_a^b f(x)dx$表示一个位于x轴上方，由直线$x=a,x=b,y=0$以及曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积。

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，如图 1–1 所示。在$[a,x_1]$上$f(x)\geq 0$，$\int_a^{x_1} f(x)dx$表示x轴上方的阴影部分面积 S_1 (称为正面积)；在$[x_1,b]$上$f(x)\leq 0$，积分$\int_{x_1}^b f(x)dx$表示x轴下方的阴影部分面积的负值$-S_2$ (称为负面积)。因此，由定积分的性质可得

$$\int_a^b f(x)dx=S_1+(-S_2)=S_1-S_2,$$

因此积分$\int_a^b f(x)dx$表示$f(x)$在$[a,b]$上的正负面积的代数和，即为定积分的几何意义。因$\int_a^b |f(x)|dx$表示正、负面积的绝对值之和，故曲边梯形的面积也可记为$A=\int_a^b |f(x)|dx$。

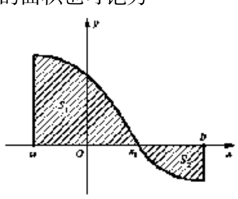

图 1–1

2. 平面图形的面积

2.1 直角坐标系下平面图形面积

直角坐标系下求平面图形面积比较常见，设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq g(x)$，则由曲线$y=f(x),y=g(x)$及直线$x=a,x=b$所围成的平面图形面积为$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$，如图 2–1。若不强调$f(x),g(x)$的大小关系，我们也可以把平面图形面积记为$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$。

类似地，由连续曲线$x=\varphi(y),x=\psi(y)$且$\varphi(y)\geq\psi(y)$，及直线$y=c,y=d$所围成的平面图形面积为$A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]dy$，如图 2–2。若不强调$\varphi(y),\psi(y)$的大小关系，我们也可以把平面图形面积记为$A=\int_c^d |\varphi(y)-\psi(y)|dy$。这里需注意，选$y$为积分变量时，函数式子需要用$y$来表示$x$，积分区间的范围也是$y$的范围。

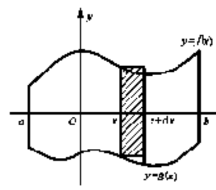

图 2–1

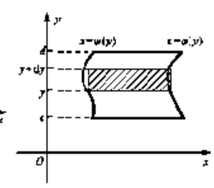

图 2–2

2.2 极坐标系下平面图形面积

极坐标也是常用的一种平面坐标，一些平面曲线利用极坐标表示会比较方便，因此，我们也可以在极坐标系下来求平面图形的面积。设曲线的方程由极坐标给出：$r=r(\theta)$，平面图形在极坐标系下由连续曲线$r=r(\theta)$及两条射线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$所围成，如图 2–3，这样的图形称为曲边扇形。其面积利用“微元法”可得到$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$。利用极坐标来计算平面图形面积时，需注意根据图形判断极角θ的范围，即注意求面积时公式中积分上下限的确定。

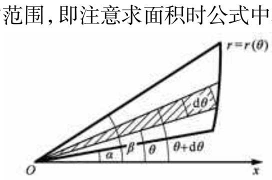

图 2–3

3. 实际问题举例

实例 1　拱桥的截面面积

某地有一抛物线形拱桥，因年久失修，桥面开裂给附近的居民带来极大的安全隐患。该地市政部门决定把拱桥下面填满，需要计

算出拱桥下的面积。请帮助市政部门求解出抛物线形拱桥的截面面积。（如图 3–1，测得拱桥的高为 5 米，跨度为 30 米）

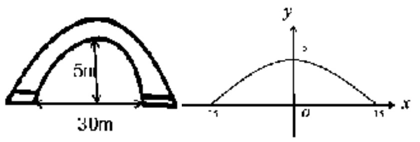

图 3–1

解：假设抛物线拱桥的方程为 $y = ax^2 + bx + c$ ，以拱桥跨度中间点为原点建立平面直角坐标系。

则抛物线过点 $(-15,0),(15,0),(0,5)$ ，代入所设方程，可知抛物线拱桥方程具体形式为

$$y = -\frac{1}{45}x^2 + 5$$

。

截面面积 $A = 2\int_0^{15}(-\frac{1}{45}x^2 + 5)dx = 2(-\frac{1}{135}x^3 + 5x)\Big|_0^{15} = 100$ 。

因此，抛物线形拱桥截面面积为 100 平方米。

实例 2 帐篷的侧面面积

露营是人们休闲的一种常见生活方式，去露营时通常要携带着帐篷，以便人们休息。帐篷的形状很多，人字形帐篷是最常见的一种。假设有一人字形帐篷侧面是由曲线 $y = x^2$ ， $y = (x-2)^2$ 以及 x 轴所围成，请求解出帐篷的侧面面积。（如图 3–2）

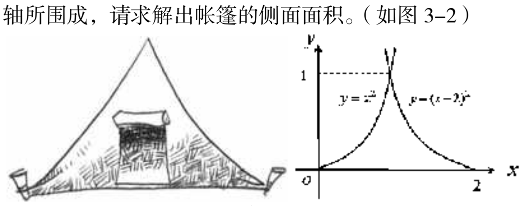

图 3–2

解：在平面直角坐标系中作出图形。选取 y 为积分变量。曲线 $y = x^2$ 即 $x = \sqrt{y}$ ，曲线 $y = (x-2)^2$ 即 $x = 2 + \sqrt{y}$ ，故所求帐篷的侧面积为：

$$A = \int_0^1 (2 + \sqrt{y} - \sqrt{y})dy = \int_0^1 2dy = 2$$ 。

实例 3 湖面的面积

某地有一人工湖的图形可以看作是由曲线 $x^2 + y^2 = 8 (y \geq 0)$ 及曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 所围成，求此块湖面的面积。（如图 3–3）

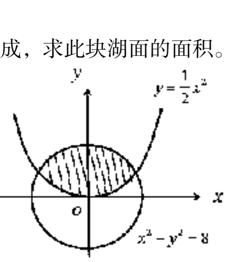

图 3–3

解：画出图形，如图所示，由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ 得交点为 $(-2,2),(2,2)$ 。所求面积可以看作第一象限面积的 2 倍，此块湖的面积为：

$$A = 2\int_0^2 (\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2)dx = 2\pi + \frac{4}{3}$$ 。

实例 4 四叶草的面积

四叶草又称幸运草，它的花语是幸福。在一些国家里，幸运草被认为是自由，团结，和平的象征，还有些人们会认为四叶草能够给他们带来好运。若四叶草一片叶子可看作由曲线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 所围成的图形，请求出四叶草面积。（如图 3–4）

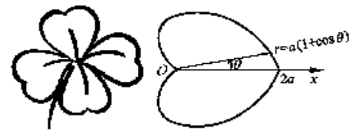

图 3–4

解：四叶草的图形在极坐标系下如图 3–4 所示，当 θ 从 0 到 π 时， $r = a(1 + \cos\theta)$ 的图形为上半部分，因此一片四叶草的面积为极轴上方面积 A_1 的两倍，即一片叶子的面积为：

$$2A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta = a^2[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$ ，

所以四叶草的面积为 $A = 8A_1 = 6\pi a^2$ 。

实例 5 蝴蝶结面积

蝴蝶结是生活中常见的物品，通常用蝴蝶结来进行装饰，衣服，包，头饰上经常会见到蝴蝶结的图案。若蝴蝶结可看作是由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ （双纽线）及半径为 a 的圆所交的内部图形，试求出蝴蝶结的面积。（如图 3–5）

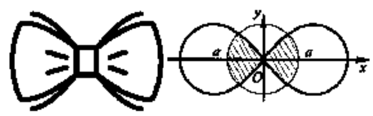

图 3–5

解：如图所示，阴影部分面积即为所求，此面积可看作第一象限部分面积的 4 倍。把曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 的方程写成极坐标的形式，即为 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 。若取第一象限的部分，此时 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。半径为 a 的圆的方程在极坐标下可写为 $r = a$ 。

由 $\begin{cases} r^2 = 2a^2\cos 2\theta \\ r = a \end{cases}$ 可得两个曲线在第一象限的交点为 $(a, \frac{\pi}{6})$ ，利用极坐标系下平面图形面积公式可得蝴蝶结的面积为：

$$A = 4(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta d\theta) = \frac{a^2\pi}{3} + 2a^2\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = (2 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3})a^2$$

。

4. 结语

学习定积分这部分知识，不仅要掌握基本的理论，方法，还需要举一反三将这部分知识应用在生活中。学理论知识较为枯燥，若在授课过程中结合实际背景加以运用，就会让枯燥的课堂变得更加有趣，也可以启发学生的潜能，让其主动愿意对新知识进行探索，感受这门学科的实用性。定积分的几何应用除了平面图形面积之外，还有旋转体的体积、曲线的弧长等，并且定积分除了几何应用，它在物理学，经济学中也有广泛应用，这些都可以通过实例来启发学生进行思考并创建有趣的实用型课堂，从而达到提高教学效率的目的。

参考文献：

[1]同济大学数学系.高等数学[M].北京：高等教育出版社,2012.

[2]马树燕,王海萍.浅谈定积分的应用——平面面积部分的教学设计[J].科学咨询（科技·管理）,2018(09):69–70.

[3]韩新方,李妍.基于核心素养的数学课堂教学实践——以“定积分的应用”为例[J].数学教学通讯,2020,(15):29–31.

作者简介：韩霖（1988–），女，河南商丘人，讲师，硕士，研究方向：应用数学。