广义逆与线性方程组的解的教学探讨

瞿勇　纪祥鲲　冯杭

（海军工程大学基础部　湖北　武汉　430033）

摘要：本文对于广义逆与线性方程组的解的关系进行了教学探讨,先给出了几个基本概念和基本结论,然后利用这些概念和结论,分别针对相容与不相容线性方程组,给出几个广义逆的重要结论,并作了简捷的证明,证明思路简洁明了,易于为学生理解和掌握.

关键词：广义逆,相容线性方程组,不相容线性方程组,最小范数解,最小二乘解

Discussion on the Teaching of Generalized Inverse and Solutions to Linear Equations

Qu Yong　Ji Xiangkun　Feng Hang

Abstract：In this paper, the relationship between generalized inverse and the solution of linear equations is discussed. Several basic concepts and basic conclusions are given, and then these concepts and conclusions are used to give several important conclusions about compatible and incompatible linear equations,respectively.Finally, a concise proof was made, the idea of proof was simple and clear, and it make students more easily understand and master.

Key words：Generalized inverse, compatible linear equations,incompatiblelinear equations, minimum norm solution, least−squares solution

Authors：Qu Yong ,associate professor of College of Sciences, Naval University of Engineering; Ji Xiangkun ,lecturer of College of Sciences, Naval University of Engineering;Feng Hang,assistant of College of Sciences , Naval University of Engineering　(Wuhan　430033)

矩阵论中广义逆与线性方程组的解的关系的相关结论在教学中学生比较难理解,下面探讨一下这部分重要结论的教学设计.

一、基本概念与基本结论

定义 1[1] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,一个 $n\times m$ 矩阵 G 满足以下条件:对任意的 $m\times 1$ 矩阵 B, 只要线性方程组 $AX=B$ 有解, $X=GB$ 也一定是解.则 G 称为矩阵 A 的一个 1–广义逆,

定理 1[1]　$n\times m$ 矩阵 G 是 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 1–广义逆的充要条件是

$$AGA=A.$$

定理 2[1] 若 A^{-} 是 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 1–广义逆,则当 $AX=B$ 有解时,其通解可表示为

$$X=A^{-}B+(E_n-A^{-}A)z,\ \forall z\in C^{n}.$$

定义 2[1] 对于相容线性方程组 $AX=B$,若在它的所有解中有 $X_0\in C^n$ 使得 $\|X\|_2=\sqrt{X^HX}$ 为最小,则称 X_0 为方程组的最小范数解.

定义 3[1] 对于不相容线性方程组 $AX=B$,若有 $X_0\in C^n$ 使得 $\|AX-B\|_2$ 最小,则称 X_0 为方程组的最小二乘解.通常把 2–范数最小的最小二乘解,称为线性方程组 $AX=B$ 的极小最小二乘解.

定义 4[1] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,若 $n\times m$ 矩阵 G 满足以下 4 个条件:

$$(1)\ AGA=A;\qquad (2)\ GAG=G;$$

$$(3)\ (GA)^H=GA;\qquad (4)\ (AG)^H=AG.$$

则称 G 为 A 的 M–P 广义逆,记为 A^{+}.

定理 3[1] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 A^{+} 存在且唯一.

定义 5 设 α,β 是内积空间 C^n 中两个向量,如果 $(\alpha,\beta)=0$,则称 α 与 β 正交,记为 $\alpha\perp\beta$.

勾股定理[2]　如果 α 与 β 正交,则有

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2,$$

其中 $\|X\|=\sqrt{X^HX}$.

二、重要结论及其证明

对于相容线性方程组有下述几个重要结论.

由定理 2 及 A^{+} 的定义, 易得如下结论.

定理 4　对于相容线性方程组,当线性方程组 $AX=B$ 有解时,其通解可表示为

$$X=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z,\ \ \forall z\in \boldsymbol{C}^{n}.$$

注:由于 A^{+} 容易求,而 A^{-} 不太容易求,所以定理 4 是一个重要结论.文献[1]并未给出这个重要结论.

定理 5　对于相容线性方程组 $AX=B$,若 A^{-} 是 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 1–广义逆,且有 $(A^{-}A)^H=A^{-}A$,则 $X^{*}=A^{-}B$ 是方程组 $AX=B$ 的唯一最小范数解.

证　(1) 由定理 2, $\forall z\in C^n$, $X=A^{-}B+(E_n-A^{-}A)z$ 为 $AX=B$ 的解,则有 $AX=B$,又有 $A=AA^{-}A$,所以

$$(A^{-}B)^H[(E_n-A^{-}A)z]=(A^{-}AX)^H(E_n-A^{-}A)z$$

$$=X^H(A^{-}A)^H(E_n-A^{-}A)z$$

$$=X^H(A^{-}A)(E_n-A^{-}A)z\qquad =X^H(A^{-}A-A^{-}AA^{-}A)z$$

$$=X^H\cdot\mathbf{0}\cdot z=0$$

再由勾股定理则有

$$\|X\|_2^2=\|A^{-}B+(E_n-A^{-}A)z\|_2^2$$

$$=\|A^{-}B\|_2^2+\|(E_n-A^{-}A)z\|_2^2\ge\|A^{-}B\|_2^2.$$

依据 X 的任意性, $X^{*}=A^{-}B$ 是最小范数解.

(2) 唯一性

设 $X_1=A^{-}B+(E_n-A^{-}A)z_1$ 是方程组 $AX=B$ 的最小范数解，而 $X^{*}=A^{-}B$ 也是最小范数解，则有 $\|X_1\|_2=\|A^{-}B\|_2$ ，

由(1)又有 $\|X_1\|_2^2=\|A^{-}B\|_2^2+\|(E_n-A^{-}A)z_1\|_2^2$

于是有 $\|(E_n-A^{-}A)z_1\|_2=0.$

从而 $(E_n-A^{-}A)z_1=\mathbf{0}.$

即有 $X_1=A^{-}B.$ 唯一性得证.

注: 文献[1]未给出上述结论中最小范数解的唯一性..

由 A^{+} 的定义,它是满足定理 5 中条件的 1–广义逆,于是有如下结论.

定理 6 对于相容线性方程组 $AX=B$，$X^{*}=A^{+}B$ 是方程组的唯一最小范数解 .

注:与定理 4 类似,这是一个重要结论.文献[1]也未给出.

对于不相容线性方程组有下述几个重要结论.

定理 7[1] 对于不相容线性方程组 $AX=B$,若 A^{-} 是 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 1–广义逆,且 $(AA^{-})^{H}=AA^{-}$, 则 $X^{*}=A^{-}B$ 一定是方程组 $AX=B$ 的最小二乘解.

证 $\forall X\in \boldsymbol{C}^{n}$,由于

$$(AA^{-}B-B)^{H}(AX-AA^{-}B)$$
$$=[B^{H}(AA^{-})^{H}-B^{H}](AX-AA^{-}B)$$
$$=[B^{H}(AA^{-})^{H}A-B^{H}A](X-A^{-}B)$$
$$=(B^{H}AA^{-}A-B^{H}A)(X-A^{-}B)$$
$$=(B^{H}A-B^{H}A)(X-A^{-}B)=0$$

由勾股定理则有

$$\|AX-B\|_2^{2}=\|AX-AA^{-}B+AA^{-}B-B\|_2^{2}$$
$$=\|AA^{-}B-B\|_2^{2}+\|AX-AA^{-}B\|_2^{2}$$
$$\geq\|AA^{-}B-B\|_2^{2}.$$

依据 X 的任意性, $X^{*}=A^{-}B$ 是最小二乘解.

注: 这里作了简捷的证明,文献[1]未作证明..

由 A^{+} 的定义,它是满足定理 7 中条件的 1–广义逆,于是有如下结论.

定理 8 对于不相容线性方程组 $AX=B$，$X^{*}=A^{+}B$ 一定是方程组 $AX=B$ 的最小二乘解.

注:与定理 6 类似,这是一个重要结论.文献[1]也未给出.

定理 9 对于不相容线性方程组 $AX=B$,方程组 $AX=B$ 的所有最小二乘解可表示为

$$X=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z,\quad \forall z\in \boldsymbol{C}^{n}.$$

证 (1) $\forall z\in \boldsymbol{C}^{n}$,令 $X=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z$.则有

$$AX=AA^{+}B+A(E_n-A^{+}A)z$$
$$=AA^{+}B+(A-AA^{+}A)z=AA^{+}B$$

于是有 $\|AX-B\|_2=\|AA^{+}B-B\|_2$.而由定理 8, $A^{+}B$ 是最小二乘解,故 $X=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z$ 也是最小二乘解.

(2) 设 X_0 为 $AX=B$ 的最小二乘解, 由定理 8, $A^{+}B$ 也是最小二乘解,所以必有

$$\|AX_0-B\|_2=\|AA^{+}B-B\|_2, \qquad (*)$$

而由定理 7 的证明过程可知 $AA^{+}B-B$ 与 $AX_0-AA^{+}B$ 正交,由勾股定理则有

$$\|AX_0-B\|_2^{2}=\|AX_0-AA^{+}B+AA^{+}B-B\|_2^{2}$$
$$=\|AA^{+}B-B\|_2^{2}+\|AX_0-AA^{+}B\|_2^{2}$$

由（*）式,于是有 $\|AX_0-AA^{+}B\|_2=0.$

从而 $AX_0-AA^{+}B=0.$ 即 X_0 为相容线性方程组 $AX=AA^{+}B$ 的解,由定理 4, $\exists z_0\in \boldsymbol{C}^{n}$,使得

$$X_0=A^{+}AA^{+}B+(E_n-A^{+}A)z_0$$
$$=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z_0$$

综合(1)(2),定理得证.

注:这是一个重要结论.文献[1]也未给出.

定理 10[1] 对于不相容线性方程组 $AX=B$，$X^{*}=A^{+}B$ 是方程组唯一的极小最小二乘解.

证 (1) 由定理 9, $\forall z\in C^{n}$，$X=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z$ 为 $AX=B$ 的最小二乘解,又有 $A=AA^{+}A$, $(A^{+}A)^{H}=A^{+}A$, 所以

$$(A^{+}B)^{H}[(E_n-A^{+}A)z]=[(A^{+}B)^{H}-(A^{+}B)^{H}(A^{+}A)^{H}]z$$
$$=[(A^{+}B)^{H}-(A^{+}AA^{+}B)^{H}]z$$
$$=[(A^{+}B)^{H}-(A^{+}B)^{H}]z=\mathbf{0}\cdot z=0$$

由勾股定理有

$$\|X\|_2^{2}=\|A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z\|_2^{2}$$
$$=\|A^{+}B\|_2^{2}+\|(E_n-A^{+}A)z\|_2^{2}\geq\|A^{+}B\|_2^{2}.$$

依据 z 的任意性, $X^{*}=A^{+}B$ 是极小最小二乘解.

(2) 唯一性

设 $X_1=A^{+}B+(E_n-A^{+}A)z_1$ 是方程组 $AX=B$ 的极小最小二乘解,而 $X^{*}=A^{+}B$ 也是极小最小二乘解,则有 $\|X_1\|_2=\|A^{+}B\|_2$ ，

由(1)又有 $\|X_1\|_2^{2}=\|A^{+}B\|_2^{2}+\|(E_n-A^{+}A)z_1\|_2^{2}$

于是有 $\|(E_n-A^{+}A)z_1\|_2=0.$

从而 $(E_n-A^{+}A)z_1=\mathbf{0}.$

即有 $X_1=A^{+}B.$ 唯一性得证.

注: 文献[1]未作证明,这里给出了较为简捷的证明.

三、结束语

教学设计上先给出了几个基本概念和基本结论,然后利用这些概念和基本结论,分别针对相容与不相容线性方程组,给出几个广义逆与线性方程组的解的关系的重要结论,并作了简捷的证明,证明思路清晰明了,简明易懂,易于为学生理解和掌握.

参考文献

[1] 罗家洪,方卫东. 矩阵分析引论(第五版)[M]. 广州:华南理工大学出版社, 2013:132−136.

[2] 戴华. 矩阵论[M]. 北京:科学出版社,2001:30.

[作者简介] 瞿勇,海军工程大学基础部副教授;纪祥鲲,海军工程大学基础部讲师;冯杭,海军工程大学基础部助教