

# 连续时间金融理论在金融资产定价研究中的应用 ——以期权为例

王雨昕

(上海榕树股权投资管理有限公司 215400)

**摘要:** 多年研究表明,金融资产的价格会随着时间的变化形成一个随机过程,这一随机过程理论便是对现实中观测到的价格进行分析和统计的基础。对于金融资产的价格,可以通过历年价格及其波动情况等因素,利用连续时间金融模型进行验证,其准确性对投资者投资行为具有一定指导意义。

本文主要针对布莱克-舒尔兹模型(Black-Scholes Model)、蒙特卡洛模拟(Monte Carlo Simulation)及欧拉法(Euler Stepping)在美国微软及强生期权价格检验中的应用进行了研究,并对模型应用中出现的问题进行了思考与优化。

**关键词:** 布莱克-舒尔兹模型;蒙特卡洛模拟;欧拉法;金融资产;期权估值

## 一、引言

Ruey S. Tsay (2009) 提出,连续时间金融理论表明金融资产可以视为连续随机变量,进而服从一个连续时间的连续过程。因此,连续时间金融模型可以对金融资产的定价做出一定解释,并提供具有合理性的预测。<sup>[1]</sup> 本文利用连续时间金融相关理论及模型,选择了两家上市公司作为研究对象,检验三种模型和方法在期权价格模拟中的合理性及准确度,并思考得出不足之处及改进方法,以此作为投资者对于金融资产的价格预测和投资决策的参考。

## 二、研究问题及假设

我们已知布莱克-舒尔兹模型可以用于期权定价。<sup>[2]</sup> 现在,要测试这个模型并找出它在实际应用中的问题及假设。

第一,如果我们把布莱克-舒尔兹公式的所有参数收集起来,代入模型,那么我们是否可以得到与公司实际价格一致的期权价格?

第二,如果我们使用蒙特卡洛模拟来计算预期期权价格的均值,它们会与实际期权价格相同吗?

第三,如果上述测试有效,我们对 Black-Scholes 模型和蒙特卡洛模拟都有合理的信心,那么我们是否可以使用这些例次来实施更困难的研究,或是做一些调查?

第四,采用欧拉法(Euler Stepping),将时间 T 分割成小块,我们需要多少步来显示收敛?

第五,通过比较不同方法所需的路径数量,可以得出收敛的程度是多少?

## 三、数据描述及方法论阐述

为了验证我们的预期,我们将以微软和强生两家不同类型的公司作为研究对象,收集数据进行研究。

### (一) 数据选取

本文中所使用的数据包括两家公司的期权价格、行权价格,以及微软和强生的期权到期日,数据采集自 Excel Bloomberg,选取的时间范围为 2019 年 8 月到 2020 年 2 月的每个交易日。除此之外,另从雅虎财经网(<https://finance.yahoo.com/>)收集了股价和股息等数据。为了检验布莱克-舒尔兹(Black-Scholes)公式,还需要无风险利率作为参数。因此,我们从美联储网站(<https://fred.stlouisfed.org/series>)上收集了 2019 年 8 月到 2020 年 2 月每月的无风险利率,对于波动率,使用实际股票价格来计算年度波动率,为了保证估值的准确性,供采集了 140 多个股票价格作为公式和模型的参数。

### (二) 模型构建

#### 1. 布莱克-舒尔兹模型(Black-Scholes Model)

将所有参数数据代入 Black-Scholes 公式来计算远期价格、零息债券价格、期权价格等,之后,我们将得到的结果与我们从网站上收集的真实价格进行比较,以检查准确性。此外,我们想看看这些理论价格是否符合一致性条件,例如看跌期权平价。<sup>[3]</sup> 具体步骤如

下:

(1) 使用 Black-Scholes 公式计算远期价格、零息债券价格、期权价格。

(2) 将我们计算的期权价格与实际数据进行比较。

(3) 检验理论价格是否满足一致性条件,是否具有与期权价值相关的某些特性,如买卖权平价关系、单调性以及各参数对期权价值的正负影响。

对各种期权执行 Black-Scholes 公式:

(1) 远期价格的连续函数,包含期限(用字母 T 表示),复利(Continuously compounding rate),无风险利率(Risk-free interest rate,用字母 r 表示),股息率(dividend rate),d,行权价(Strike),交割价格(Delivery price,用字母 K 表示),到期日行权价格(Spot),t 时刻的股价(用字母 S 表示)和波动率(用字母  $\sigma$  表示)。

(2) 期望收益在时间 0 时的现值:

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

(3) t 时刻期望收益的现值:

$$f = e^{-r(T-t)} [Se^{r(T-t)} - K] = S - Ke^{-r(T-t)}$$

(4) t 时刻看涨期权(Call Option)的现值:

$$d1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$f_{call} = e^{-rT} E(\max(S_T - K, 0)) = S_0 N(d1) - Ke^{-rT} N(d2)$$

(5) t 时刻看跌期权(Put Option)的现值:

$$f_{put} = e^{-rT} E(\max(K - S_T, 0)) = Ke^{-rT} N(-d2) - S_0 N(-d1)$$

(6) t 时刻二元看涨期权(Digital-call Option)的现值:

现金或无价值看涨期权(Cash-or-nothing Call):

$$\text{Value of call} = e^{-rT} QN(d2)$$

资产或无价值看涨期权(Asset-or-nothing Call):

$$\text{Value of call} = S_0 e^{-rT} N(d1)$$

(7) t 时刻看跌期权的现值:

现金或无价值看跌期权(Cash-or-nothing Put):

$$\text{Value of put} = e^{-rT} QN(-d2)$$

资产或无价值看跌期权(Asset-or-nothing Call):

$$\text{Value of put} = S_0 e^{-rT} N(-d1)$$

(8) t 时刻零息债券的现值:

$$f_{call} + Ke^{-rT} = f_{put} + S_0$$

$$Ke^{-rT} = f_{put} + S_0 - f_{call}$$

2.通过蒙特卡洛模拟验证,随机演变一个股票价格从时间 0 到时间 T 根据几何布朗运动的漂移  $r-d$ , 波动  $\sigma$ 。使用公式如下:

$$S_T = S_0 e^{(r-d)T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}W}$$

对于微软:

(1)使用 MATLAB 进行蒙特卡洛模拟,对 2019 年 8 月 6 日的股价进行检验。通过蒙特卡洛模拟,我们生成了大量的  $S_T$ 。然后我们计算所有这些期权值的期望。

(2)将期望折现以得到一个结果。

(3)将该数值与实物期权价格以及 Black-Scholes 模型计算的期权价格进行比较。

(4)画出显示收敛的图。

对于强生:

(1)在 MATLAB 中对 2019 年 9 月 16 日的股价进行蒙特卡洛模拟检验,生成大量的  $S_T$ , 同时计算这些期权值的期望。

(2)将期望折现以得到一个结果。

(3)将该数值与实物期权价格以及 Black-Scholes 模型计算的期权价格进行了比较。画出显示收敛的图。

### 3.欧拉法 (Euler Stepping)

在数学和计算科学中,欧拉法(也称前欧拉法)是求解具有给定初值的常微分方程(ODE)的一阶数值过程。它是常微分方程数值积分最基本的显式方法,也是最简单的龙格-库塔法。欧拉法是以莱昂哈德·欧拉的名字命名的,它是一阶法,即局部误差(每步误差)与步长平方成正比,全局误差(给定时间的误差)与步长成正比。

在本次研究中,我们也尝试使用欧拉法作为蒙特卡洛的替代方案。我们将时间 T 分成大量的步骤 n,有:

$$\Delta t = T/N$$

然后,通过以下公式来一步步演算股票价格:

$$S_{(j+1)\Delta t} = S_{j\Delta t} + rS_{j\Delta t}\Delta t + S_{j\Delta t}\sigma\sqrt{\Delta t}W_j$$

其中  $W_j$  是独立的正态变量。通过这种逐步演算,当计算到最后一步时,即为一种产生最终股票价格的替代方法。我们可以用这种方法来为上面的期权来计算价格。

(1)画出最终价格与步数的关系函数来检验收敛需要多少步数。

(2)比较两种方法下,要得到既定收敛程度而所需的路径数。

(3)检查两种方法是否得出相同的价格。

(4)比较两种方法下获得既定精度水平所需的时间。

## 四、研究结果与解释

### (一)检验结果及解释

代入布莱克-斯科尔斯模型所需的所有参数后,我们得到了一系列期权价格。为了评估理论价格与实际价格之间的差异,计算出统计值。对于微软而言,理论看涨期权价格与实际看涨期权价格的平均差值为-0.9065,标准差为 4.8044。理论看跌期权价格与实际看跌期权价格的平均差值为-1.8652,标准差为 1.3764。

表 1 微软 (MSFT) 的模拟理论价格与实际价格差异

微软 MSFT	平均差异 Average Difference	标准差 Standard Deviation
看涨期权 Call	-0.9065	4.8044
看跌期权 Put	-1.8652	1.3764

类似地,我们对 JNJ 进行了同样的计算验证。理论看涨期权价格与实际看涨期权价格的平均差值为 0.8777,标准差为 0.7815。理论看跌期权价格与实际看跌期权价格的平均差值为-0.4520,标准差为 0.8964。

表 2 强生 (JNJ) 的模拟理论价格与实际价格差异

强生 JNJ	平均差异 Average Difference	标准差 Standard Deviation
看涨期权 Call	0.8777	0.7815
看跌期权 Put	-0.4520	0.8964

从微软和强生的研究结果不难看出,本次利用布莱克-斯科尔斯模型进行的定价结果与实际价格仍然存在一些偏差。在解释上,我们主要把误差原因归结为三点:首先,我们根据每月的价格变化,利用过去一年的股票价格计算波动率并将其年化。2018 年可能出现了一些意想不到的价格变化,对波动产生了很大的影响,进而对期权价格模拟结果也造成了一定的作用。第二,我们的假设是股票价格与美联储网站上公布的无风险利率一起增长,但股价的变化往往并不是跟随一个固定的增长率,而是不断变动。第三,布莱克-斯科尔斯模型本身假设股价随几何布朗运动过程而变化,且世界的变化在假设中呈风险中性;在交易中心默认没有交易成本的产生,市场充分流动。在这样的假设前提下,理论值与实际值不同是很自然的。

### (二)一致性检验

为了检验一致性,我们以 2018 年 8 月 2 日的数据和结果为例,使用布莱克-斯科尔斯法计算了看涨期权和看跌期权的价格。从最终结果来看,遵循了买卖权平价关系 (Put-call parity), 即

$C - P = S_0 - Ke^{-rT} = 3.78$ 。微软期权的执行价为 140 美元时,其看涨价值低于执行价为 135 美元时的看涨价值。因此,看涨期权的价格随行权价单调递减。

表 3 微软 (MSFT) 在 2019 年 8 月几个交易日中买卖权平价关系的数据体现

日期 Date	看涨期权价值 Call Value	看跌期权价值 Put Value	看涨期权与看跌期权价差 C-P	当日股价 Stock Price	股票与零息债券价值之差 $S_0 - Ke^{-rT}$
2019/8/2	9.6174	5.8365	3.7810	136.9	3.7810
2019/8/5	6.9730	7.8933	-0.9203	132.21	-0.9203
2019/8/6	8.2707	6.7223	1.5484	134.69	1.5484

数据来源: Bloomberg, 2019 年数据

此外,所有计算出的看涨期权价格都介于 S 和  $S - Ke^{-rT}$  之间。 $S - Ke^{-rT}$  的值为 3.78, S 的值为 136.9, 看涨期权价格为 9.62, 恰好介于 S 和  $S - Ke^{-rT}$  之间。当波动率从 17% 增加到 23% 时,看涨期权的价格也随之增加,即看涨期权的价格随波动率单调递增。

表 4 执行价为 135 美元和 140 美元时微软的看涨期权价格

日期 Date	看涨期权价格 Call Value (K=135)	看涨期权价格 Call Value (K=140)
2019/8/2	9.6174	7.1551
2019/8/5	6.9730	4.9928
2019/8/6	8.2707	6.0363

表 5 波动率为 17% 和 23% 时微软的看涨期权价格

日期 Date	看涨期权价格 Call Value (Vol=17%)	看涨期权价格 Call Value (Vol=23%)
2019/8/2	9.6174	12.1611
2019/8/5	6.9730	9.5000
2019/8/6	8.2707	10.8097

另外,通过公式计算出的零息债券的理论价格是 135, 看涨二元期权和看跌二元期权的价格之和为 133。因此,数字看涨期权加数字看跌期权的价格几乎等于我们的零息债券的价格。当股息为零时,看涨期权价格随时间 t 而上涨。

### (三)调查与收敛

回顾研究过程,我们使用了布莱克-斯科尔斯模型与欧拉法这

两种方法来模拟股票价格和期权价格。对于检验结果之间的偏差，我们不妨思考，当模拟生成的路径数量增加到一个非常大的水平时，理论值是否将与实际值一致？

我们用 MATLAB 软件计算并绘制了蒙特卡洛模拟的收敛性，以及欧拉法的验证结果。选取某一日期的股票价格作为初始股价，然后在 MATLAB 中编写代码，得到多路径下的模拟股价。例如，我们选择了 2019 年 8 月 6 日微软的股价，随着漂移和扩散，我们得到了 10 万股股票的价格；基于这些值，我们计算了期权收益及平均值，并对平均值进行了折算。经比较后不难发现，这些值仍然不同于实际股价。因此，我们继续将模拟路径数量增加到 100 万条，得到了更精确的数值，但是偏差仍然存在。

图 1 微软 (MSFT) 看涨期权模拟价格与实际价格

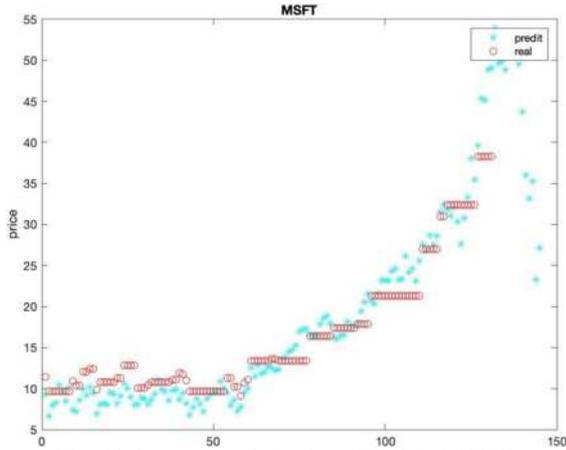


图 2 微软 (MSFT) 看跌期权模拟价格与实际价格

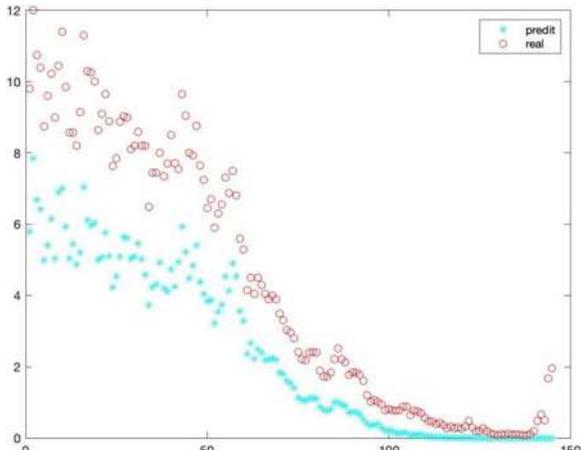


图 3 强生 (JNJ) 看涨期权模拟价格与实际价格

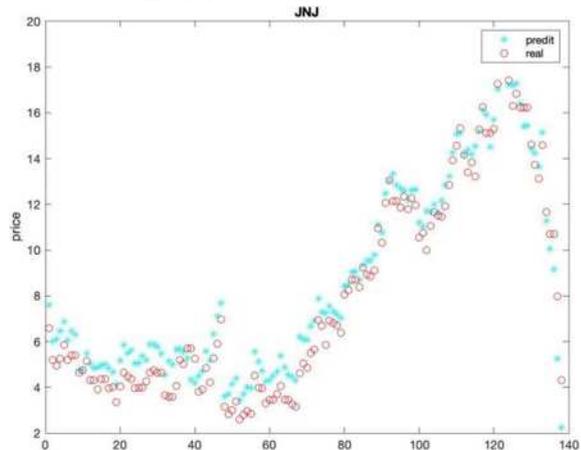


图 4 强生 (JNJ) 看跌期权模拟价格与实际价格

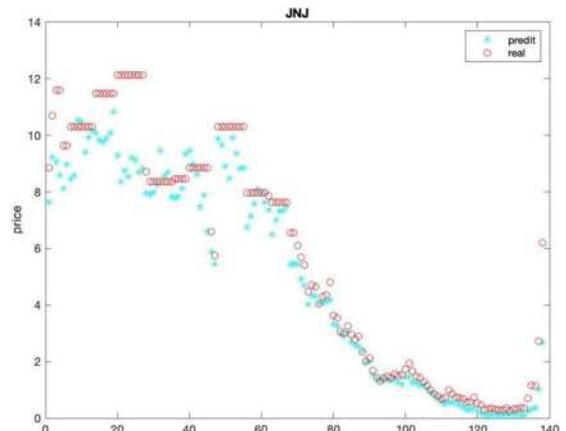


图 5 微软 (MSFT) 看涨期权价格收敛所需要的步数

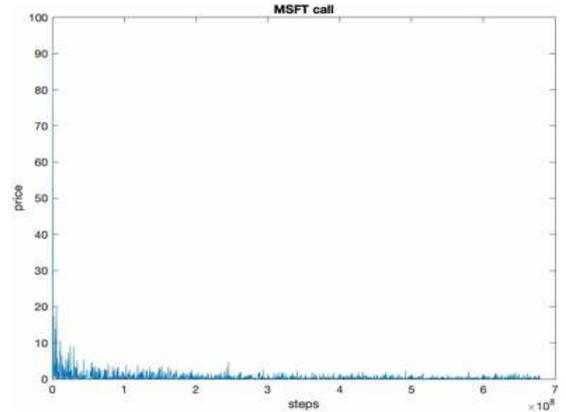


图 6 微软 (MSFT) 看跌期权价格收敛所需要的步数

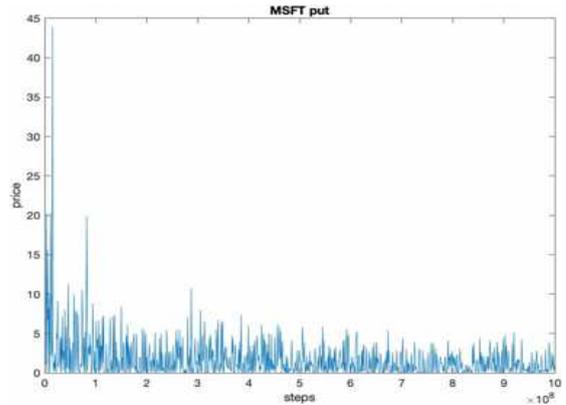
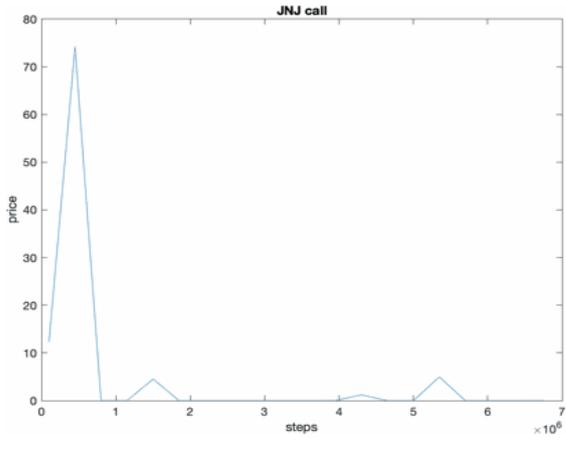


图 7 强生 (JNJ) 看涨期权价格收敛所需要的步数



(下转第 312 页)

感,弥补绘画表现力的不足,在实际画作中,它不仅能丰富设计的表面,而且能起到很好的设计感,而且在一定程度上给人们带来更强的视觉影响。从远处看水彩画时,纹理往往比点或线更容易吸引眼球,能激发欣赏者的观看兴趣,有助于欣赏者理解水彩插画调所表达的情感与内涵。比如在绘画中,对于围巾和皮毛制品的表现,纹理的运用会增加作品的真实感,而这种真实感是用线和点都达不到的表现效果,通过在水彩画中加入肌理的表现,欣赏者可以直接对欣赏画家所赋予的水彩艺术美的人产生视觉效果,使观者对插图有直观、真实的感受。另外,纹理的运用与线和点相似。通过改变色彩、光线、色调等,在一定程度上也能根据实际需要,激发欣赏者更加丰富的情感,使表现更加有层次。

#### (四) 水彩插水中水色的视觉表现

对水彩画而言,最根本的表现就是水彩本身的变化。没有了色彩的支撑,水彩画中的点、线、环境就失去了存在的价值和意义,无法表现出绘画本身的内涵、情感和价值。在水彩插画中,水彩的变化能给人们带来最直接、最直观、最震撼人心的视觉效果,给人们留下深刻印象。在水彩的设计中,色彩的变化会给人以不同的口音,给人以不同的印象。而在水彩插图的制作与设计,创作者往往最注重层次感感和对比感,只有具有良好的层次感和对比感,才能突显较高的艺术价值,展现出更丰富的作品内涵,赋予作品更具生命力,展现更强的艺术价值和效益,随着水彩画技术的不断发展,水彩画的表现空间得到极大的拓展,这种表现空间不仅体现在造型设计上,而且还体现在一些原创动画设计中,书籍插图和影视剧本都是如此。其中,水是影响水彩绘画的主要因素。水彩插画更能体现插图画家的专业基础、专业技能和审美水准。对于水彩画来说,水分过多往往会导致饱和度和纯度的下降,影响绘画的表现力,缺水则会影响水彩的扩散,破坏绘画的美感。所以,水彩画比油画、蜡笔画更难,而这种困难也迫使水彩画的制作者不断地锻炼技巧。做水彩画时,我们要注意它的完成,用水必须得当。色彩的分布和

排列并不要求颜色的均匀,但是我们必须反映不同的颜色。不同之处在于颜色的亮度,纯度,冷暖。在此基础上,使画面层次分明,使水彩画更能体现出作品的魅力和作者的个人情感。

#### 三、总结

在插画设计中,水彩的视觉语言主要来自于点、线、纹理和水彩本身的变化。对于水彩插画而言,创作者需要更清楚地了解其作品所表达的情感与意蕴,在水彩画设计中,画家要对点、线、肌理进行一定的比较,然后调整水彩画的变化,使水彩画更具表现力,包含更多的情感和内容,更好地完成作品的表达与升华,体现出更高的应用价值和艺术价值。

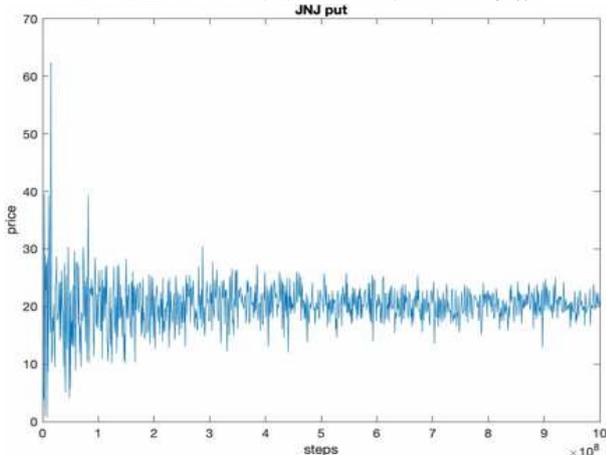
#### 参考文献:

- [1] 郭一可.当代插画表现形式在水彩画中的运用[J].美术文献,2019(10):46-47.
- [2] 张涛.时尚女性水彩插画设计视觉表现研究[J].设计,2017(9):136-137.
- [3] 康文.水彩在插画表现中的运用[J].西部皮革,2018,40(18):151.
- [4] 张皓月.镜象意蕴[D].湖北美术学院 2017
- [5] 江亚珍.中国水彩风景画的艺术语言特色与教学[D].江西师范大学 2011
- [6] 刘宁.论在风景创作中对水彩本体语言的追求[D].青岛大学 2008
- [7] 杨涛.浅析中国当代水彩静物画的艺术特色[D].河北师范大学 2011
- [8] 周威.水彩画中树的表现难度探究[D].湖南师范大学 2013

作者简介:张馨心(2002.07.20),女,汉族,籍贯:黑龙江省齐齐哈尔市拜泉县,佳木斯大学美术学院,20级在读本科生,学士学位,专业:绘画水彩,研究方向:绘画水彩

(上接第 294 页)

图 8 强生(JNJ)看跌期权价格收敛所需要的步数



#### 五、研究结论及优化建议

##### (一) 优化参数选取

总结三个模型和方法,虽然基于取数得出的验证结果并不完美,但总体而言这些模拟具有较强的合理性,在实际应用中准确度有待提高。蒙特卡洛模拟的基本假设是:基于假设输入和输出都具有固有随机性的随机模型。在实际操作中,大多数蒙特卡洛软件使

用正态分布作为标准假设,而这些假设的存在于实际应用中毫无疑问会对结果产生一定影响。除了这两点之外,对于无风险利率、波动率以及折现日期等参数的选择,也影响着模拟的结果。理论中的基本假设以及对于模型参数的选取过于理想化,因此,需要结合当下的市场情况及宏观政策进行取舍。

##### (二) 增加模拟路径

结合上面的检验解释,在蒙特卡洛模拟和欧拉法中,当模拟路径增加时,模拟价格结果也会越加收敛。对此,我们不难看出,增加模拟路径可以使得价格预测更为准确。

##### (三) 使用多种方法交叉验证

布莱克-舒尔兹模型、蒙特卡洛模拟及欧拉法各有优劣势,在实际应用中可以结合三种方法交叉验证,提升预测的准确性。除此之外,还可以使用跳跃扩散模型(Jump Diffusion Model)、随机波动模型(Stochastic Volatility Model)等作为补充。

#### 参考文献:

- [1] Ruey S Tsay. Analysis of Financial Time Series[M], 2009.
- [2] 费为银.随机理论在连续时间金融市场模型中的应用[J].安徽机电学院学报, 2001, 16(2):1-2.
- [3] 陶俊卿,王菲.基于布莱克-舒尔斯模型对我国权证市场现状进行的分析[J].经济工作, 2007, 17(1):117-119.