基于“三教”改革下的牛顿-莱布尼兹公式教学设计

周大琮

（重庆城市职业学院　重庆永川　402160）

摘要：“三教改革”对教师、教材、教法提出了更高的要求，本文在三教改革理念下，对牛顿−莱布尼兹公式教学进行了创新，借助社会热点，创设情境引出课题，通过问题逐步引导学生探索求定积分的有效方法，通过实例对照深刻理解牛顿−莱布尼兹公式的重要性，理解公式内涵，利用公式解决实际问题。

关键词：“三教”改革　牛顿−莱布尼兹公式　原函数

牛顿−莱布尼兹公式是微积分学的基本公式，也是求连续函数定积分的重要工具，它把求定积分的问题转化成求原函数的问题，搭建了微分学与积分学的之间的桥梁，在微积分学中处于极其重要的地位，起到了承上启下的作用。因此在教学过程中，为了让学生更深刻的理解公式的重要性及实际应用，在三教改革理念下，不断创新教学方法，给学生传授知识的同时，更注重培养学生的自主探索及社会参与意识。从实际案例出发，让学生通过对本节的学习，掌握基本公式及应用，进一步体会事物间的相互联系及转换。培养学生辩证唯物主义观点，提高理性思维的能力，对此，我们做了以下设计：

一、创设情景、提高兴趣

积分学对学生来说是一个难点，学生不易理解，因此，我们借助社会热点事件，构造经典案例，激发学生的学习热情及潜力。

今年二月，俄乌冲突爆发，俄罗斯用导弹对乌克兰的军事设施进行了精准打击，那么导弹在时间区间内所飞行的路程应怎么计算呢？用下面的例子进行分析。

引例：

导弹的行程：某种导弹的飞行速度为 $v(t)=-68t^2+680t\left(t\in[0,8]\right)$(m/s),

(1)用不定积分计算导弹在时间区间 [2,5]内所飞行的路程;

(2)用定积分表示导弹在时间区间 [2,5]内所飞行的路程.

二、问题引导、构建新知

在三教改革的理念下，教师不能墨守成规，要勇于突破传统的教学方法，充分发挥学生的主体作用，培养学生的自学及创新能力，达到最终掌握知识，构建新知的目的。

问题（一）、根据以前所学知识，能不能找到有效方法计算导弹行程？

由速度与路程的关系得 $s(t)=\int\left(-68t^2+680t\right)dt$

$=-\dfrac{68}{3}t^3+340t^2+c$

当 t = 0 时， s = 0.代入上式，得 C = 0. 故

$s(t)=-\dfrac{68}{3}t^3+340t^2$

因此，导弹在时间区间[2,5]内所飞行的路程为 s(5) − s(2) = 4488.

问题（二）、导弹所飞行程路程还可以怎么表示？

由定积分的知识，路程可表示为：

$\int_2^5 v(t)dt=\int_2^5\left(-68t^2+680t\right)dt$

将问题一、二综合起来，可得以下关系：

$\int_2^5 v(t)=s(5)-s(2)=4488$

其中 $s'(t)=v(t)$，即 s(t) 是 v(t) 的一个原函数.

问题（三）、对于一般的连续函数 f (x)，若 $F'(x)=f(x)$，是否有 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ 成立呢？

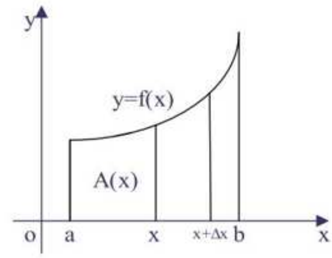
这种定积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性.

通过前面情境创设及问题引导，即让学生多所学知识有了一定的了解，又能让学生明白理论知识及科技创新的重要性，激发学生的爱国热情，能在今后的工作生活中为国家的强大做出自己的贡献。

三、适时点拨，诱导探究问题的方法

我们知道，在不定积分概念中已经提出原函数存在定理:设 f(x)在[a.b]上连续.则 f(x)在[a.b]上存在原函数. 引导学生去寻找:f(x)、定积分、原函数三者之间的关系。由于定积分概念的背景是以面积为基础、于是与定积分的几何意义进行联系，讨论其面积的“构造”。

用 f(x)及定积分的几何意义构造“面积函数”. 不妨设 f(x)>0.在[a.b]内任取一点.用 A(x)表示由 x 轴、x=a、x=x、y=f(x)围成的面积函数、显然 A(x)是 $x\in[a,b]$ 的一个连续函数。如图所示：



可知：

$f_{min}\Delta x\le \Delta x$（x＋Δx)-A（x）$\le f_{max}\Delta x$

当 $\Delta x\to 0$ 时：$f_{min}\Delta x\to 0$，$f_{max}\Delta x\to 0$

所以 A（x＋Δx)-A（x）$\to 0$

$f_{min}\le\dfrac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}\le f_{max}$

由于 y=f（x）是连续函数，当Δ x→0 的时候，f_{min} 和 f_{max} 都趋向于同一数值 f（x）。

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=f(x)$

故 $A'(x)=f(x)$

这也说明 A（x）是 f（x）的一个原函数，所以我们将 A（x）叫做积分上限函数，定义为 $A(x)=\int_a^x f(t)dt$

通过以上探究方法，使学生利用几何直观了解积分上限函数的构造渊源，以形见数，积分上限函数不再是抽象枯燥、人为构造的理论知识，运用数形结合这一思想方法体现了积分上限函数的形象化、生动化。

由此得到:若 f(x)在[a、b]上连续，那么 f(x)在[a、b]上的不定积分可用定积分表示为：$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+c$

它揭示了不定积分与定积分之间内在的、本质的联系，同时也揭示了导数与定积分之间的联系，求导运算与变上限积分运算的互逆运算。进一步启发我们寻找定积分的计算与不定积分关系。

四、巧选角度，品尝解决问题的快乐

上面我们所找到的积分上限函数$\int_a^x f(t)dt$这个原函数，其余f（x）的一半原函数之间究竟可以找到什么样的关系呢？

我们令F（x）为f（x）的任意一个原函数，由于f（x）的两个原函数之间相差一个常数C，则F（x）和积分上限函数$\int_a^x f(t)dt$之间相差一个常数C。

于是A（x）–F（x）=C（*）

上式中求得C是关键，但是从积分上限函数A（x）中可以获取多种信息：原函数、定积分等，选择哪一种渠道能够得到C呢？特殊值法是最容易得到的：

因为A（a）=$\int_a^x f(t)dt$=0　所以就有–F（a）=C

从（*）得$\int_a^x f(t)dt$=F（x）–F（a）

将积分上限函数转化为定积分，即为$\int_a^b f(t)dt$=F(b)–F(a)。

为了方便，也可以写为$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=F(\mathrm{b})-F(\mathrm{a})$。

微积分基本公式：如果函数F(x)是[a, b]上的连续函数f(x)的任意一个原函数，则$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$。为了方便起见，还常用$F(x)\big|_a^b$表示F(b) − F(a)，该式称之为微积分基本公式或牛顿 —莱布尼兹公式。公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的本质联系:一个连续函数在区间[a,b]上的定积分等于它的任何一个原函数在区间[a,b]上的增量(即：求任一个原函数在积分上、下限处函数值之差)，从而为计算定积分提供了一个强有力的工具，为计算定积分提供了一种有效方法，为后面的学习奠定了基础。

五、对照实例，巩固新知

在定积分的定义学习中，学习了用定积分定义通过“分割、近似、求和、取极限”的步骤求定积分$\int_0^1 x^2dx$的值，接下来用牛顿—莱布尼兹公式来计算定积分的值。

例：计算$\int_0^1 x^2dx$

解：由于$\frac{1}{3}x^3$是x^2的一个原函数，

所以根据牛顿—莱布尼兹公式有$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot1^3-\frac{1}{3}\cdot0^3=\frac{1}{3}$。

可以看出，与用定积分的定义求值相比较，用牛顿—莱布尼兹公式求定积分的值要简单很多。

通过例子，学生归纳总结，不难得出用公式求定积分的步骤：

1，找到导函数的一个原函数。

2, 因为常数的导数为零，故选择原函数计算定积分时，为了简化运算一般不要带常数。

3，利用牛顿–莱布尼兹公式求出函数的积分。

通过对牛顿 —莱布尼兹公式的学习，让学生更深刻的理解了生活中遇到困难、复杂的问题不要轻言放弃，要敢于面对困难，善于把复杂的问题转化为简单的问题。同时，为了进一步提升学生的独立思考，勇于探索的精神，培养学生质疑问题、反思问题的能力，我们把本节内容进一步扩充。

六、激励求知，培养质疑问题、反思问题的能力

从以上学习中我们可以知道，牛顿--莱布尼兹公式是在一定的条件之下才会成立的。我们设f（x）在[a，b]上连续，F（x）为f（x）的一个原函数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=F(\mathrm{b})-F(\mathrm{a})$。

在实际的教学中学生可能会产生以下两个问题：

（一）、当F（x）在[a，b]上可积时，是不是都可以表示为$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=F(\mathrm{b})-F(\mathrm{a})$？

（二）、如果F（x）是f（x）的一个原函数，则公式$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=F(\mathrm{b})-F(\mathrm{a})$

是不是恒成立？

针对以上的问题可以首先引导学生利用反例说明公式的实际适用范围。

学生讨论：设f（x）在[a，b]之内有第一类间断点，则f（x）在[a，b]上是不是有原函数，此时$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$是不是存在的？因为每一个都含有第一类间断点的函数都是没有原函数的，但是它们的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$可能会存在。其结论为，当$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$存在的时候，不一定都可以表示为$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}=F(\mathrm{b})-F(\mathrm{a})$。

对于问题（二）让学生讨论举例:无界函数 f(x)的定积分是否存在?原函数是否存在?定积分有两个条件:被积函数有界和积分区间有限，且被积函数可积与积分和收敛是等价的，积分和收敛时定积分等于某个实数，当上述两个条件不满足时就是要进一步扩张新的积分，即是说无界函数不存在定积分，但其原函数可能存在。于是确实有这样的函数 f(x)，它有原函数但 f(x)不可积，$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$未必存在，要使牛顿—莱布尼兹公式成立必须引进新的积分概念。

上述两个问题说明了原函数存在性与定积分的存在性这两者之间并无必然联系，强调了公式的条件，随着条件的变化牛顿—莱布尼兹公式需做进一步拓广。进一步说明牛顿—莱布尼兹公式一般情况下，是计算连续函数f(x)的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$的有效、简便的方法，把它转化为求f(x)的原函数在[a,b]上的增量。

结束语：三教改革要求以教师为主导，学生为主体的理念进行教学，充分发挥学生的自主学习及探索能力，本次课就是以这种理念出发，通过创设情境，以社会热点为例，借助于变速运动物体的速度与路程的关系引出课题。用提问的方式激发学生的积极性，逐步引导学生探索新知，得出了用微积分基本定理求定积分的一种简便方法。此方法培养了学生的独立思考、知识创新、勇于探索的能力，在教学过程中取得了很好的效果。

参考文献：

[1]周建松，陈正江. 高职院校“三教”改革：背景、内涵与路径. [J] 中国大学数学，2019（9）:86-91.

[2]郭蕾. “三教”改革理念下对高职数学教学的探索与实践 .[J] 科技与创新，2021(1):87.

[3]程磊,李静.函数的原函数存在与黎曼可积的关系[J].高等数学研究,2021,24(01):77-79+90.

[4]易强,吕希元.牛顿-莱布尼茨公式教学方式研究[J].课程教育研究,2018(42):167-168.

[5]胡绍宗.关于牛顿-莱布尼茨公式的注记[J].高等数学研究,2015,18(06):33-35.

[6]邓雪,江璐瑶,孙全德,刘小兰.牛顿-莱布尼兹公式在与路径无关的曲线积分中的应用[J].兰州文理学院学报(自然科学版),2015,29(03):94-97.DOI:10.13804/j.cnki.2095-6991.2015.03.023.

作者简介：周大琼，硕士，E-mail:335318940@qq.com