思政元素融入无穷级数的教育实践

段佩　张锋　汪艳

（商洛职业技术学院　陕西省商洛市　726000）

教育部 2020 年印发《高等学校课程思政建设指导纲要》(教高 [2020]3 号) 文件中指出，“全面推进课程思政建设，就是要寓价值观引导于知识传授和能力培养之中，帮助学生塑造正确的世界观、人生观、价值观，这是人才培养的应有之义，更是必备内容。”高等数学，作为高职学生必修的一门公共基础课，无穷级数则是高等数学的重要组成部分。其不仅是表示函数、研究函数的性质及进行数值计算的一种非常有用的工具，在自然科学、工程技术等，以及许多数学分支中都有广泛的应用。另外，该部分也蕴含了丰富的课程思政元素。因此，在教育实践中应注意挖掘无穷级数的思政元素，发挥课堂教学的作用。在学习知识的过程中融入思政元素，既传授了学科知识，也通过思政元素的融入，润物细无声地培养学生立德树人的思想。

1. 数学文化融入教学

1.1 数学史之中国古代数学，培养科学的历史观

中国有着五千年的悠久历史，也积累了许多优秀的文化成果。将中国历史故事截杖问题和割圆术在导入中展现出来，可将学生代入一个既熟悉又陌生的领域，让学生对即将学习的数学概念产生兴趣，同时也激发学生的民族自豪感和自信心，启发学生对问题的思考从而给出无穷级数定义。

1.2.1 庄周《庄子・天下篇》

《庄子・天下篇》：“一尺之锤，日取其半，万世不竭。”

将每天截下来部分的长度“加”起来就是一个无穷级数：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

春秋战国时期我国著名的哲学家庄周所著《庄子・天下篇》里就有了关于无穷级数的数学思想，从而自然的引出无穷级数及其收敛的概念。

1.2.2 割圆术

魏晋时期，数学家刘徽曾说：“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”

刘徽在最早得到逼近圆周只需要计算圆内接正多边形即可，一个半径为 1 的圆内接正多边的周长就可以用无穷级数表示：

$$L_n=2n\sin\frac{\pi}{n}=\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{(\frac{\pi}{n})^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

计算得：
$$\frac{4L_{2n}-L_n}{6}-\pi=O(n^{-5})$$

当 n=192 时，就是祖冲之得到的圆周率的 7 位精度。

刘徽采用割圆术求得圆周率近似值 3.14 (我们称“徽率”)。其后 200 年，南北朝时期数学家祖冲之，发展了割圆术，创用新法将圆周率的近似值提高到小数四位 3.1416 (密率)；之后又求得七位小数近似值——3.1415926 ~ 3.1415927，这两个数分别称为“朒”、“盈”二数 (祖率或祖术)。这个记录保持了 900 多年，直到 15 世纪，中亚数学家阿・卡西才把记录提高到 16 位小数，现在早已突破了 1 万亿位。数学史家曾说：“数学家们对 π 值的精益求精的不断追求，使 π 不断精确，成了各个时代的数学才能的度量。”

通过以上不仅仅惊叹数学家们构思之巧妙，还能感受到他们所特有的一种追求精确性，精益求精的执著精神。而这种精神不仅仅对于做学问、做算法都是重要的，甚至对于做任何事情都是同等重要的。

1.2 数学家之中国数学家，增强学生的民族自豪感和自信心

以微积分为基础的分析数学是近代数学发展的主流，而无穷级数是其重要组成部分。过去，人们一直认为只有西方研究了无穷级数。其实，清代蒙古族杰出数学家、天文学家明安图在《割圆密率捷法》卷中已经用无穷级数展开式进行天文计算了，具有代表性的有角度求八线问题，“分弦通弦率数求全弧通弦率数”“弧背求通弦率数法解”“弧背求正矢率数法解”等，还有“进为一”、“截断法”、“去尾”等方法。

例如：《捷法》中，已知角度求八线问题中，明安图用多项式 $x-\frac{x^3}{3!r^2}+\frac{x^5}{5!r^4}-\frac{x^7}{7!r^6}+\frac{x^9}{9!r^8}$ 近似替代弧背求正弦公式：

$$r\sin x=x-\frac{x^3}{3!r^2}+\frac{x^5}{5!r^4}-\frac{x^7}{7!r^6}+\frac{x^9}{9!r^8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!r^{2(n-1)}}+\cdots$$

x 用弧度表示，$n\ge 1$，弧背求正弦公式满足莱布尼兹准则，为莱布尼兹级数，截断误差为：$|R_6(x)|\le\frac{x^{11}}{11!r^{10}}<10^{-1}$

在多个数求和时，被加数的绝对值之间相差较多，而“带小余一位单位数方密”，使计算结果更精密，说明他对误差已有一定的认识。

在中国算学史上，明安图把“率”的概念首次应用于无穷级数，创造了无穷级数的加、减、乘。在世界数学史上首先提出了卡塔兰数列，在《捷法》中用三种不同的方法算出了这种数列，并给出其递推公式。

2. 哲学思想融入数学

从古至今，哲学与数学关系密切，哲学的发展和数学的发展也密切相关。在高等数学中也蕴含了诸多哲学思想。比如，有限与无限，连续与离散，微分与积分，无穷级数和函数与函数的幂级数展开等。它们之间既对立有统一，为人们在解决实际问题中提供了许多方法和思想，也推动着数学的发展。

2.1 有限与无限

有限与无限是初等数学与高等数学的区别之一。这两者之间有本质的不同，但二者又有联系。

例如，无穷级数求和 $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^i=1$ 就是利用有限的步骤，求出无限次运算的结果。

2.2 量变与质变

例 1 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

证 调和级数的前 2^{m+1} 项和

$$s_{2^{m+1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^m+2^m})$$

$$>\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\cdots+\underbrace{(\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})}_{2^m项}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m+1项}+\frac{m+1}{2}$$

因为 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m+1}{2}=\infty$，则 $\lim\limits_{m\to\infty}s_{2^{m+1}}=\infty$，故调和级数发散。

调和级数的通项趋于 0，通过严格的证明得出的结果却是发散的。在此过程中引导学生由调和级数的发散，进而探寻出量变与质变的规律，从而对于调和级数有了更深刻的认识。

这个数学结果还告诉我们一个道理：不要小看少量不起眼的积累，很多少量的和可以很大。习近平总书记在谈教育时说：“每个人的生活都是一件件小事组成的，养小德才能成大德。”正所谓古话说的“不以恶小而不为，不以善小而不为”。

2.3 对立与统一

例 2 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$，$x\in(-1,1)$ 的和函数

解　设幂级数的和函数为 $s(x)$，即

$$s(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots$$

根据幂级数的性质，对上式逐项求导，得

$$s'(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x},x\in(-1,1)$$

对 $s'(x)=\frac{1}{1+x}$ 两边积分，得

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx+s(o)=\ln(1+x)$$

故幂函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的和函数 $s(x)=\ln(1+x),x\in(-1,1)$

例 3 将 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数

解　因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$，

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

对上式两边积分，得

$$\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\int_0^x1dx-\int_0^xxdx+\int_0^xx^2dx-\int_0^xx^3dx+\cdots+(-1)^n\int_0^xx^ndx+\cdots$$

即

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1]$$

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性，常数 $p>0$

解 （1）当 $p=1$ 时，级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，故发散

（2）当 $p<1$ 时，有 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}$，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

（3）当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 可写成

$$1+(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p})+(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p})+(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p})+\cdots$$

$$<1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2p-2}}+\frac{1}{2^{3p-3}}+\cdots$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(n-1)(p-1)}}$ 是公比为 $\frac{1}{2^{p-1}}$ 的等比级数，

当 $p>1$ 时，$0<\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(n-1)(p-1)}}$ 收敛；

当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 也收敛。

综上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le1$ 时发散。

通过以上例题可以体现出求和函数和函数的幂级数展开式是两个对立的问题，但又互相依存，相互贯通。并且，在一定条件下是可以相互转化的，这又体现了问题矛盾的统一性。也正是这种对立与统一的相互关系，推动着事物的发展、变化，且不论在级数还是高等数学这门课程中都是普遍存在的，这也体现了矛盾的普遍性。

2.4 化归思维

例 5 将 $f(x)=\sin x$ 展开成关于 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数

解　因为

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

令 $t=x-\frac{\pi}{4}$，则 $x=t+\frac{\pi}{4},\sin x=\sin(t+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}],t\in(-\infty,+\infty)$$

因此 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots],x\in(-\infty,+\infty)$

解法中利用了化归思维、间接展开，将未知的函数转化为已知函数的幂级数展开。既培养了学生从不同的角度探寻问题的数学素养，又培养学生要树立人生目标、做好人生规划。——间接展开是建立在直接展开的基础上，未知函数的展开式建立在已知函数展开式的基础上的，也就是学生要知道自己要干什么，必须建立在什么基础之上，因此就要求学生知道哪些函数的展开式是已知的，是要化归的目标。如此，解数学题就如做人生规划般，学习如人生。

2.5 特殊与一般

例 6 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

解 考察傅里叶级数 $J(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\cos nx+b_n\sin nx)$ 问题转化为求证 $J(0)=\frac{\pi^2}{6}$

设上式为周期 2π 的 $J(x)$ 的傅里叶级数，则 $J(0)=\frac{1}{2}[J(0^+)+J(2\pi^-)]$

先考察 $g(x)=x^2(0\le x\le 2\pi)$ 傅里叶级数，

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}$$

于是，$x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nx+b_n\sin nx)$

因此，$f(x)=\frac{1}{4}(x^2+\frac{4}{3}\pi^2),0\le x\le 2\pi$，就有形如 $J(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\cos nx+b_n\sin nx)$ 的傅里叶级数，从而 $J(0)=\frac{\pi^2}{6}$

从特殊问题出发，讨论它的一般性问题。反之，从一般问题考察其特殊情形。认识遵循由易到难，由浅入深得规律，先解决简单的特殊问题，再从中找到解决一般问题的启示。在无穷级数学习中，常将一些数项级数的求和置于适当的函数项级数中去。解题中，常常会利用“以退为进”的思维方法将问题做“特殊化”或“一般化”处理。

2.实际应用

数学源于生活，而数学研究的成果最终将又应用于生产生活实践。

问题 1 科赫曲线

瑞典数学家海里格·科赫在 1904 年构造了一种曲线，叫科赫曲线，也叫雪花曲线。其构造方法是任意画一个正三角形，并把每一条边三等分，以三等分后中间的一段为边向外作正三角形，并去掉中间这一小段；重复上面的步骤，画出更多、更小的正三角形，反复操作，直到无穷。

科赫曲线的作图步骤是无限的，因此当测量用尺的长度零的时候，测量得到的科赫曲线的长度便趋于无穷大。它的周长无限，面积有限的结论恰好可以使用级数的知识来证明。科赫曲线的周长与面积，一方面展现了数学的几何美与趣味性；另一方面也体现了级数的实际应用价值，拓展了学生的数学视野，提高了学生的数学素养，丰富了学生数学文化的学习。

问题 2 基金创立

创立某项奖励基金需要筹集资金。若该基金从创立之日起，一年需支付 3 百万元作为奖励，基金的利率为每年 5%，分别以以下两种方式计算：

（1）年复利计算利息；

（2）连续复利计算利息。

问需要募集多少原始资金？

解 设奖励基金按年发放

（1）按年复利计算利息

第 1 次奖励基金，需募集资金 3 百万元；

第 2 次奖励基金，需募集资金 $\frac{3}{1+5\%}=\frac{3}{1.05}$ 百万元；

第 3 次奖励基金，需募集资金 $\frac{3}{(1+5\%)^2}=\frac{3}{1.05^2}$ 百万元；

⋮

需筹集资金为

$$3+\frac{3}{1.05}+\frac{3}{1.05^2}+\cdots+\frac{3}{1.05^n}+\cdots=\frac{3}{1-\frac{1}{1.05}}\approx 6300$$ 万元

（2）按连续复利计算利息

第 1 次奖励基金，需募集资金 3 百万元；

第 2 次所需募集资金为 $3e^{-0.05}$ 百万元；

第 3 次所需募集资金为 $3e^{-0.05\times 2}$ 百万元；

⋮

募集的总资金为

$$3+3e^{-0.05}+3e^{-0.05\times 2}+\cdots+3e^{-0.05\times n}+\cdots=\frac{3}{1-e^{-0.05}}\approx 6151$$ 万元

按年复利算，募集资金约为 6300 万元；按连续复利算，募集资金约为 6151 万元。

这两个问题展示了级数在实际问题中的应用，让学生感悟“数学是源于生活，且高于生活，又用于生活”，增强课堂内容的思想性、实用性，有效的将隐形的思政元素融入教学实践中。

在教学实践中，以学生获取知识为载体，把思政元素融入无穷级数课堂教学，把价值观的塑造和培育融入数学课堂，不仅能够使学生在学习数学知识的同时，培养学生坚定的理想信念，树立正确的人生观和价值观。同时，还增加了无穷级数教学的生动性和趣味性，激发学生的学习兴趣，培养学生的数学素养和唯物主义辨证观，从而真正达到教书育人的目的。

参考文献：

[1]教育部.高等学校课程思政建设指导纲要>的通知,教高〔2020〕3 号

[2]尚强等.数学文化与文化数学[M].上海:上海教育出版社,2012.7

[3]王鑫义.《割圆密率捷法》中的奇零尾数的问题[J].山西大同学学学报（自然科学报）.2019,35(06)

[4]何精华.高等数学课程中的“课程思政”案例教学研究[J].北华航天工业学院，2022(03):

[5]张婷.课程思政背景下《高等数学》与思政教育的融合研究[J].兰州文理学院学报（自然科学版），2021(35)

[6]王欣等.基于教学环节的高等数学课程思政策略研究[J].高等数学研究，2022(04)

[7]朱焕桃.数学文化融入高职数学教学的研究与实践[M].北京：中国纺织出版社有限公司，2020.6

[8]张京良.“高等数学”课程思政的分析与实施[J].黑龙江教育（理论与实践），2022(09)

[9]李玲等.HPM 视角下“无穷级数概念引入”的教学[J].内江科技，2021,42(02)

[10]康永强，陈燕燕.应用数学与数学文化[M].北京：高等教育出版社，2019.9

[11]毛羽辉，韩士安，吴畏.数学分析（第 4 版）学习指导书[M].北京:高等教育出版社，2012.1

[12]顾沛.数学文化[M].北京:高等教育出版社，2017.11

[13]李文林.数学史概论[M].北京：高等教育出版社，2011.2

[14]冯颖.常数项级数概念的微课教学设计[J].高等数学研究,2017,20(3):17−19

[15]苏涵等.基于课程思政角度的教学设计——常数项级数的概念[J].高等数学研究，2022,03